

## Mục lục

I. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN .....	3
1. Dãy số .....	3
a. Khái quát về dãy số: .....	3
b. Dãy số tăng – Dãy số giảm:.....	3
c. Dãy số bị chặn trên – Dãy số bị chặn dưới – Dãy số bị chặn: .....	3
2. Cấp số cộng (CSC) .....	4
3. Cấp số nhân (CSN) .....	4
II. GIỚI HẠN.....	4
1. Giới hạn của dãy số.....	4
a. Dãy số có giới hạn hữu hạn:.....	4
b. Dãy số có giới hạn vô cực:.....	5
2. Giới hạn của hàm số .....	5
a. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm:.....	5
b. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực: .....	6
c. Giới hạn vô cực của hàm số:.....	6
d. Các dạng vô định: .....	6
3. Hàm số liên tục .....	8
III. ĐẠO HÀM.....	9
1. Đạo hàm tại một điểm .....	9
2. Quy tắc tính đạo hàm .....	10
3. Công thức tính đạo hàm .....	10
4. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số.....	10
5. Vi phân .....	11
6. Đạo hàm cấp cao .....	11
7. Ý nghĩa của đạo hàm trong vật lí .....	11
IV. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN.....	11
1. Đường thẳng song song với mặt phẳng .....	11
2. Hai mặt phẳng song song .....	12
3. Xác định thiết diện.....	12
V. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN .....	12
1. Các phép toán véctơ .....	12
2. Các quy tắc .....	12
3. Chứng minh 3 véctơ đồng thẳng.....	12
VI. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN .....	13
1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.....	13
2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng .....	13
3. Hai mặt phẳng vuông góc.....	13
4. Góc giữa hai mặt phẳng.....	14
5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng .....	14
6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.....	15

## TỔNG ÔN HỌC KÌ II MÔN TOÁN LỚP 11

### I. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

#### 1. Dãy số

##### a. Khái quát về dãy số:

- Dãy số **hữu hạn** là dãy số mà ta biết được số hạng đầu và số cuối.

**Ví dụ:** Dãy số  $(u_n)$ : 1,2,3,4,5 là một dãy số hữu hạn có 5 số hạng và có số hạng đầu là  $u_1 = 1$ , số hạng cuối ứng với số hạng thứ năm là  $u_5 = 5$ .

- Dãy số **vô hạn** là dãy số mà ta biết được số hạng đầu và số hạng tổng quát được biểu diễn qua công thức.

**Ví dụ:** Dãy số  $(u_n)$ :  $u_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$  hay ta viết dưới dạng khai triển là  $(u_n)$ : 1,4,9,16,..., $n^2$ ,... Đây là dãy số vô hạn có số hạng đầu là  $u_1 = 1$  và số hạng tổng quát  $u_n = n^2$ .

- Dãy số thường được **biểu diễn dưới 3 dạng** sau:

**Dạng 1:** Biểu diễn dưới dạng khai triển, ví dụ:  $(u_n)$ : 1,4,9,16,..., $n^2$ ,...

**Dạng 2:** Biểu diễn dưới dạng công thức của số hạng tổng quát, ví dụ:  $(u_n)$ :  $u_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Dạng 3:** Biểu diễn dưới dạng công thức truy hồi, ví dụ: Dãy Phi-bô-na-xi  $(u_n)$ :  $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$ .

Nói một cách khác, cho một dãy số bằng công thức truy hồi, tức là:

Cho số hạng đầu và cho hệ thức truy hồi là hệ thức biểu thị số hạng thứ  $n$  qua số hạng đứng trước nó.

##### b. Dãy số tăng – Dãy số giảm:

- Dãy số tăng là dãy số mà **số hạng sau lớn hơn số hạng trước**, tức là:

$$(u_n) \text{ là dãy số tăng thì } u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**Ví dụ:** Dãy số  $(u_n)$ : 1,4,9,16,... hay  $(u_n)$ :  $u_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$  là các dãy số tăng.

- Dãy số giảm là dãy số mà **số hạng sau nhỏ hơn số hạng trước**, tức là:

$$(u_n) \text{ là dãy số giảm thì } u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**Ví dụ:** Dãy số  $(u_n)$ :  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$  hay  $(u_n)$ :  $u_n = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  là các dãy số giảm.

- Có 2 cách chứng minh dãy số tăng – dãy số giảm như sau:

**Cách 1:** Xét hiệu của biểu thức  $H = u_{n+1} - u_n$ .

Nếu  $H > 0$  thì dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Nếu  $H < 0$  thì dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm.

**Cách 2:** Xét thương của biểu thức  $T = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

Nếu  $T > 1$  thì dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Nếu  $T < 1$  thì dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm.

**Chú ý.** Nếu biết  $u_n$  thì tính  $u_{n+1}$  bằng cách thay  $n$  bằng  $n+1$  vào  $u_n$ .

**Ví dụ:** Nếu  $u_n = n^2 + 2n$  thì  $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) = n^2 + 4n + 3$ .

##### c. Dãy số bị chặn trên – Dãy số bị chặn dưới – Dãy số bị chặn:

- Dãy số bị chặn trên là dãy số có **số hạng tổng quát nhỏ hơn hoặc bằng một số**, tức là:

$$\text{Nếu } u_n \leq M, \forall n \text{ thì dãy số } (u_n) \text{ bị chặn trên bởi số } M.$$

- Dãy số bị chặn dưới là dãy số có **số hạng tổng quát lớn hơn hoặc bằng một số**, tức là:

$$\text{Nếu } u_n \geq m, \forall n \text{ thì dãy số } (u_n) \text{ bị chặn dưới bởi số } m.$$

- Dãy số bị chặn là dãy số vừa **bị chặn trên** và **bị chặn dưới**, tức là:

Nếu  $m \leq u_n \leq M, \forall n$  thì dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

**Chú ý.** Nếu  $a \geq b > 0$  và  $c > 0$  thì  $\frac{c}{a} \leq \frac{c}{b}$ .

## 2. Cấp số cộng (CSC)

- CSC là một dãy số mà kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng bằng **tổng của số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi  $d$**  ( $d$  được gọi là công sai), tức là:

$$(u_n) \text{ là CSC} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Nếu  $(u_n)$  là một CSC thì **số hạng tổng quát**  $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

- Nếu  $(u_n)$  là một CSC thì **tổng của  $n$  số hạng**  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$ .

- Nếu  $(u_n)$  là một CSC thì kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng bằng **trung bình cộng của số hạng đứng ngay trước và số hạng đứng ngay sau nó**, tức là:

$$(u_n) \text{ là một CSC thì } u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 2.$$

- Nếu dãy số  $a, b, c$  là một CSC thì  $a + c = 2b$ .

## 3. Cấp số nhân (CSN)

- CSN là dãy số mà kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng bằng **tích của số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số không đổi  $q$**  ( $q$  được gọi là công bội), tức là:

$$(u_n) \text{ là CSN} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Nếu  $(u_n)$  là một CSN thì **số hạng tổng quát**  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

- Nếu  $(u_n)$  là một CSN thì **tổng của  $n$  số hạng**  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$ .

- Nếu  $(u_n)$  là một CSN thì kể từ số hạng thứ hai trở đi, bình phương mỗi số hạng bằng **tích của số hạng đứng ngay trước và số hạng đứng ngay sau nó**, tức là:

$$(u_n) \text{ là một CSN thì } u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, \forall k \geq 2.$$

- Nếu dãy số  $a, b, c$  là một CSN thì  $a \cdot c = b^2$ .

## II. GIỚI HẠN

### 1. Giới hạn của dãy số

#### a. Dãy số có giới hạn hữu hạn:

- Các kết quả được thừa nhận của **dãy số có giới hạn 0**:

$$[1]. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

$$[2]. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

$$[3]. \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad (|q| \leq 1).$$

$$[4]. \lim_{n \rightarrow +\infty} c = 0 \quad (c = \text{const}).$$

$$[5]. \left. \begin{array}{l} |u_n| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

**Chú ý.**  $|\sin| \leq 1$  và  $|\cos| \leq 1$ .

- Định lý về **giới hạn hữu hạn**: Nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = M$  thì:

$$[1]. \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = L + M.$$

$$[2]. \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = L - M.$$

$$[3]. \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = L \cdot M.$$

$$[4]. \lim_{n \rightarrow +\infty} (c \cdot u_n) = c \cdot L \quad (c = \text{const}).$$

$$[5]. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0).$$

$$[6]. \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |L|.$$

$$[7]. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{L}.$$

$$[8]. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{L} \quad (u_n \geq 0, \forall n \Rightarrow L \geq 0).$$

- **Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn**  $u_1, u_1q, \dots, u_1q^n, \dots$  có công bội  $q$  ( $|q| < 1$ ) là:  $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}$ .

### b. Dãy số có giới hạn vô cực:

- Các kết quả được thừa nhận của **dãy số có giới hạn vô cực**:

$$[1]. \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

$$[2]. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{n} = +\infty \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

$$[3]. \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad (q > 1).$$

$$[4]. \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

- Các quy tắc tìm giới hạn vô cực:

**Quy tắc 1:** Nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \pm\infty$  thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n)$  được cho trong bảng sau:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

**Quy tắc 2:** Nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L \neq 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n)$  được cho bởi bảng sau:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	Dấu của $L$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

**Quy tắc 3:** Nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \neq 0$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  ( $v_n \neq 0$ ) thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$  được cho bởi bảng sau:

Dấu của $L$	Dấu của $v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

## 2. Giới hạn của hàm số

### a. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm:

- Các kết quả được thừa nhận **giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm**:

$$[1]. \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

$$[2]. \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c = \text{const}).$$

- Định lý về **giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm**:

Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$  thì:

$$[1]. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

$$[2]. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M.$$

$$[3]. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = L.M.$$

$$[4]. \lim_{x \rightarrow x_0} [c.f(x)] = c.L \quad (c = \text{const}).$$

$$[5]. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0).$$

$$[6]. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|.$$

$$[7]. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}.$$

$$[8]. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L} \quad (f(x) \geq 0 \Rightarrow L \geq 0).$$

• **Giới hạn một bên của hàm số:**

$$[1]. \text{Ta luôn có } x_0^- < x_0 < x_0^+.$$

$$[2]. \text{Điều kiện có } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

**b. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực:**

• Các kết quả được thừa nhận của **giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực:**

$$[1]. \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c \quad (c = \text{const}).$$

$$[2]. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

• Định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm **vấn đúng** cho giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực, tức là ta thay  $x \rightarrow x_0$  thành  $x \rightarrow +\infty$  hoặc  $x \rightarrow -\infty$ .

**c. Giới hạn vô cực của hàm số:**

• Các kết quả được thừa nhận **giới hạn vô cực của hàm số:**

$$[1]. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \text{ với } k \text{ là số nguyên dương.}$$

$$[2]. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty \text{ nếu } k \text{ là số chẵn.}$$

$$[3]. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty \text{ nếu } k \text{ là số lẻ.}$$

$$[4]. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

• Các **quy tắc** tìm giới hạn vô cực của hàm số:

**Quy tắc 1:** Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \neq 0$  thì  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$  được cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Dấu của $L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

**Quy tắc 2:** Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (g(x) \neq 0)$  thì  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  được cho trong bảng sau:

Dấu của $L$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

**d. Các dạng vô định:**

• **Phương pháp khử dạng vô định  $\frac{0}{0}$  khi  $x \rightarrow x_0$ :**

[1]. **Đối với hàm phân thức:**

Ta phân tích tử thức và mẫu thức thành các biểu thức chứa nhân tử chung  $x - x_0$  rồi rút gọn.

**Ví dụ:**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 2}{x+1} = -\frac{3}{2}$ .

**[2]. Đối với biểu thức chứa căn thức:**

Ta nhân hoặc chia lượng liên hợp để khử căn thành các biểu thức chứa nhân tử chung  $x - x_0$  rồi rút gọn.

**Chú ý.** Các biểu thức liên hợp:

$$\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}; \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}; \sqrt[3]{A} - B = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2}; \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}.$$

**Ví dụ:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7} - 2) - (\sqrt{x+3} - 2)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x^2 - 3x + 2} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{12} - \frac{-1}{4} = \frac{1}{6}, \text{ với:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x+7) - 8}{\sqrt[3]{(x+7)^2 + 2\sqrt[3]{x+7} + 4}}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-2)f(x)} = -\frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x+3) - 4}{\sqrt{x+3} + 2}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)[\sqrt{x+3} + 2]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-2)[\sqrt{x+3} + 2]} = -\frac{1}{4}$$

- **Phương pháp khử dạng vô định  $\frac{\infty}{\infty}$  khi  $x \rightarrow +\infty$  hoặc  $x \rightarrow -\infty$ :**

**[1]. Đối với hàm phân thức:**

**TH1.** Bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu: Ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của  $x$  ở mẫu.

**Ví dụ:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^4 - x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4} \right)} = \frac{0}{1} = 0$ .

**TH2.** Bậc của tử bằng bậc của mẫu: Ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của  $x$  ở mẫu.

**Ví dụ:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{x^4 - x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4} \right)} = \frac{1}{1} = 1$ .

**TH3.** Bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu: Ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của  $x$  ở mẫu.

**Ví dụ:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{-x^2 - x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{x^2}}{-1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty$ .

**[2]. Đối với biểu thức chứa căn thức:**

Ta cũng làm tương tự giống như hàm phân thức.

**Chú ý.** Khi  $x \rightarrow +\infty$  thì  $x > 0 \Rightarrow |x| = x$  và khi  $x \rightarrow -\infty$  thì  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ .

**Đặc biệt:**  $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, & \text{khi } A \geq 0 \\ -A, & \text{khi } A < 0 \end{cases}$ ;  $\sqrt[3]{A^3} = A$ .

**Ví dụ:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 \left(1 - \frac{3}{x^5}\right)}}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^3 \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}}{2 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{+\infty \cdot 1}{2} = +\infty \end{aligned}$$

• **Phương pháp khử dạng vô định  $\infty - \infty$ :**

Ta đưa về dạng  $\frac{\infty}{\infty}$  bằng cách nhân liên hợp.

**Ví dụ:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 1} + x\right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{-x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 1\right)} = \frac{-\infty}{-\sqrt{2} - 1} = +\infty. \end{aligned}$$

• **Phương pháp khử dạng vô định  $0 \cdot \infty$ :**

Ta đưa về dạng  $\frac{\infty}{\infty}$  bằng cách nhân liên hợp.

**Ví dụ:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^5 - x^2 + 3}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^2 \left(x^3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{2x^3 + x}{x^3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5}}} = -\frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5}}} = -\frac{2}{1} = -2. \end{aligned}$$

**3. Hàm số liên tục**

• **Hàm số liên tục tại một điểm** có hai dạng cơ bản sau:

**Dạng 1:** Hàm số  $f(x) = \begin{cases} F(x), & \text{khi } x \neq x_0 \\ G(x), & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$  liên tục tại điểm  $x = x_0$  khi và chỉ khi  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Do đó ta phải có  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = k$  và  $G(x_0) = k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$  liên tục tại điểm  $x = x_0$ .

**Ví dụ:** Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}, & \text{khi } x \neq 3 \\ 5, & \text{khi } x = 3 \end{cases}$  tại điểm  $x = 3$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4$  và  $f(3) = 5$

Do đó  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$  hay  $f(x)$  không liên tục (hay gián đoạn) tại điểm  $x = 3$ .

**Dạng 2:** Hàm số  $f(x) = \begin{cases} F(x), & \text{khi } x \geq x_0 \\ G(x), & \text{khi } x < x_0 \end{cases}$  liên tục tại điểm  $x = x_0$  khi và chỉ khi  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

Do đó ta phải có  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = k, \lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) = k$  và  $F(x_0) = k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$  liên tục tại điểm  $x = x_0$ .

**Ví dụ:** Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}, & \text{khi } x < 1 \\ -2x, & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$  tại điểm  $x = 1$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x) = -2$

Và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\frac{(2-x)-1}{\sqrt{2-x}+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(\sqrt{2-x}+1) = -2$

Mà  $f(1) = -2$ . Do đó  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -2$  hay  $f(x)$  liên tục tại điểm  $x = 1$ .

- Hàm số  $y = f(x)$  **liên tục trên khoảng**  $(a; b)$  nếu  $y = f(x)$  liên tục tại mọi điểm trên khoảng  $(a; b)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  **liên tục trên đoạn**  $[a; b]$  nếu  $y = f(x)$  liên tục tại mọi điểm trên khoảng  $(a; b)$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  và  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .
- Hàm số **đa thức** liên tục trên toàn bộ tập số thực  $\mathbb{R}$ .

**Ví dụ:** Hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$  liên tục trên toàn bộ tập thực tức là nó liên tục trên mọi điểm.

- Hàm số **phân thức hữu tỉ** (tử thức và mẫu thức là hai đa thức) và các **hàm số lượng giác** liên tục trên từng **khoảng xác định** của chúng.

**Ví dụ:** Hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$  liên tục trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$  vì có TXĐ là  $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

- Nếu hàm số  $f(x)$  **liên tục** trên khoảng  $[a; b]$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có **ít nhất một nghiệm** trên khoảng  $(a; b)$ .

**Ví dụ:** Hàm số  $f(x) = x^3 + 2x - 5$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  (vì nó là hàm số đa thức) nên hàm số cũng liên tục trên đoạn  $[0; 2]$  và có  $f(0) \cdot f(2) < 0$  nên phương trình  $x^3 + 2x - 5 = 0$  có ít nhất một nghiệm trên khoảng  $(0; 2)$ .

### III. ĐẠO HÀM

#### 1. Đạo hàm tại một điểm

- Đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  là  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
- $\Delta x = x - x_0$  được gọi là **số gia của đối số tại**  $x_0$ .

•  $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  được gọi là **số gia tương ứng của hàm số**.

• **Quy trình để tính đạo hàm bằng định nghĩa:**

**Bước 1:** Tính  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  với  $\Delta x$  là số gia của đối số tại  $x_0$ .

**Bước 2:** Tìm  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**Ví dụ:** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  tại điểm  $x_0 = 2$ .

Giả sử  $\Delta x$  là số gia của đối số tại  $x_0 = 2$ . Ta có:

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}.$$

## 2. Quy tắc tính đạo hàm

Cho các hàm số  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$ . Khi đó:

- Quy tắc tính **đạo hàm của một tổng**:  $(u + v)' = u' + v'$ .
- Quy tắc tính **đạo hàm của một hiệu**:  $(u - v)' = u' - v'$ .
- Quy tắc tính **đạo hàm của một tích**:  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ .
- Quy tắc tính **đạo hàm của một thương**:  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$  ( $v \neq 0$ ).
- Quy tắc tính **đạo hàm của một tích với một số**:  $(c \cdot u)' = c \cdot u'$  ( $c = \text{const}$ ).
- Quy tắc tính **đạo hàm hợp**  $y = u(v) = u[v(x)]$ :  $(u(v))' = v'(x) \cdot u'(v)$ .

## 3. Công thức tính đạo hàm

STT	Hàm sơ cấp (chỉ chứa biến $x$ )	Hàm hợp ( $u = u(x)$ )
1.	$(c)' = 0, (x)' = 1, (c \cdot x)' = c, (cx + k)' = c$ với $c, k = \text{const}$ .	
2.	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = u' \cdot \alpha \cdot u^{\alpha-1}$
3.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
4.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
5.	$(\sqrt[\alpha]{x})' = \frac{1}{\alpha \sqrt[\alpha]{x^{\alpha-1}}}$	$(\sqrt[\alpha]{u})' = \frac{u'}{\alpha \sqrt[\alpha]{u^{\alpha-1}}}$
6.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
8.	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (1 + \tan^2 u)$
9.	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot (1 + \cot^2 u)$

## 4. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số

- Phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm điểm  $M(x_0; y_0)$  (với  $y_0 = f(x_0)$ ) hoặc tại điểm có hoành độ  $x_0$  là:

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

**Chú ý.**  $f'(x_0)$  là **hệ số góc** của đường thẳng  $\Delta$  và **nó chính là đạo hàm** của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$ .

- Có 3 dạng bài về viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như sau:

**Dạng 1:** Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$

Phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$  là

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ với } f'(x_0) \text{ là hệ số góc của đường thẳng } \Delta$$

**Dạng 2:** Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  khi biết  $\Delta$  đi qua điểm  $A(a; b)$

Giả phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$  là

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ với } f'(x_0) \text{ là hệ số góc của đường thẳng } \Delta$$

Khi đó, vì tiếp tuyến  $\Delta$  đi qua điểm  $A(a; b)$  nên

$$b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0) \Rightarrow x_0 = ? \Rightarrow \Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)?$$

**Dạng 3:** Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  khi biết vị trí tương đối của  $\Delta$  với một đường thẳng

Giả phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $M(x_0; y_0)$  là

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ với } f'(x_0) \text{ là hệ số góc của đường thẳng } \Delta$$

Khi đó, nếu ta biết vị trí tương đối của đường thẳng  $\Delta$  và đường thẳng  $d: y = ax + b$  thì ta làm như sau:

**TH1.**  $\Delta \parallel d \Leftrightarrow f'(x_0) = a \Rightarrow x_0 = ? \Rightarrow \Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)?$

**Chú ý.** Nếu ta tìm được phương trình  $\Delta: y = ax + c$  thì  $c \neq b$  (nếu  $c = b$  thì  $\Delta \equiv d$ ).

**TH2.**  $\Delta \perp d \Leftrightarrow f'(x_0).a = -1 \Rightarrow x_0 = ? \Rightarrow \Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)?$

**TH3.**  $(\Delta, d) = \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = \left| \frac{f'(x_0) - a}{1 + f'(x_0).a} \right| \Rightarrow x_0 = ? \Rightarrow \Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)?$

## 5. Vi phân

- Vi phân của hàm số  $y = f(x)$  được tính và viết là  $dy = d[f(x)] = f'(x)dx$ .
- Ta cũng có thể biến đổi công thức trên thành  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  và cũng có thể hiểu rằng  $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$  nên ta cũng có thể nói rằng vi phân là cách viết khác của đạo hàm.

## 6. Đạo hàm cấp cao

- Đạo hàm cấp  $n$  của hàm số  $y = f(x)$  được tính và viết là  $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

**Ví dụ:** Cho hàm số  $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ . Tính đạo hàm cấp 5 của hàm số.

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 + 6x \Rightarrow f''(x) = [f'(x)]' = 12x^2 + 6 \Rightarrow f'''(x) = [f''(x)]' = 24x \Rightarrow f^{(4)}(x) = [f'''(x)]' = 24$$

$$\text{Vậy } f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]' = 0.$$

## 7. Ý nghĩa của đạo hàm trong vật lí

- Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s = s(t)$  tại thời điểm  $t_0$  là  $v(t_0) = s'(t_0)$
- Cường độ dòng điện tức thời của điện lượng xác định bởi phương trình  $Q = Q(t)$  tại thời điểm  $t_0$  là  $I(t_0) = Q'(t_0)$

## IV. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

### 1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng thì ta chọn một trong các cách sau để chứng minh:

Cách 1 (Thường dùng)	Cách 2	Cách 3
$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$	$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ a \subset (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (P)$	$\left. \begin{array}{l} (P) \cap (Q) = a \\ (Q) \cap (R) = b \\ (R) \cap (P) = c \\ b \parallel c \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (R)$

**Hệ quả:**

$\left. \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ b \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$	$\left. \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$	$\left. \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \parallel (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$
---	---	---

## 2. Hai mặt phẳng song song

$\left. \begin{array}{l} a \subset (P) \text{ và } a \parallel (Q) \\ b \subset (P) \text{ và } b \parallel (Q) \\ a \cap b = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$	<p><b>Hệ quả:</b></p> $\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ (R) \cap (P) = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (R) \cap (Q) = b \\ a \parallel b \end{array} \right.$
---	---

## 3. Xác định thiết diện

Với bài toán **thiết diện** khi  $a \parallel (P)$  thì ta thường dùng định lí sau:

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

## V. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

### 1. Các phép toán vectơ

- **Tổng** của 2 vectơ:  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
- **Hiệu** của 2 vectơ:  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$
- Hai vectơ **cùng phương**:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương  $\Leftrightarrow$  giá của chúng song song hoặc trùng nhau  $\Leftrightarrow \vec{b} = k \cdot \vec{a}$
- **Tích vô hướng** của 2 vectơ: Tích vô hướng của 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là 1 số, được xác định:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Liên quan tới **độ dài vectơ** là  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = AB^2$

### 2. Các quy tắc

- Quy tắc **trung điểm**: Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì 
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}, \forall O \text{ bất kì} \end{array} \right.$$
- Quy tắc **trọng tâm**: Nếu G là trọng tâm  $\Delta ABC$  thì 
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}, \forall O \text{ bất kì} \end{array} \right.$$
- Quy tắc **hình bình hành**: Nếu ABCD Là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- Quy tắc **trọng tâm tứ diện**: Nếu G là trọng tâm tứ diện ABCD thì 
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}, \forall O \text{ bất kì} \end{array} \right.$$
- Quy tắc **hình hộp**: Nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

### 3. Chứng minh 3 vectơ đồng thẳng

3 vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng thẳng  $\Leftrightarrow \vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c} \Leftrightarrow$  tồn tại cặp số  $(m; n)$  duy nhất.

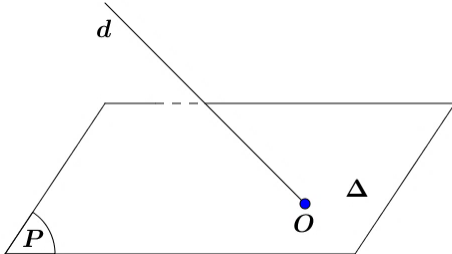
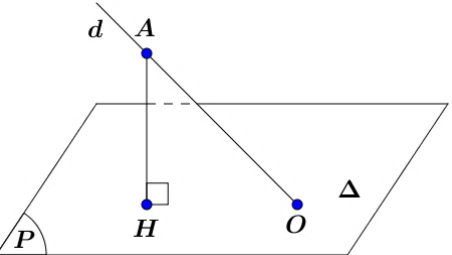
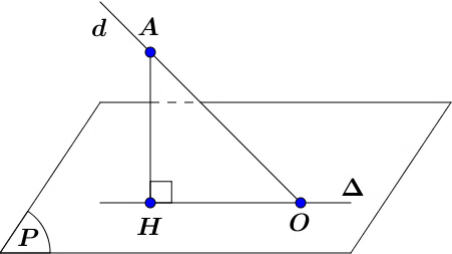
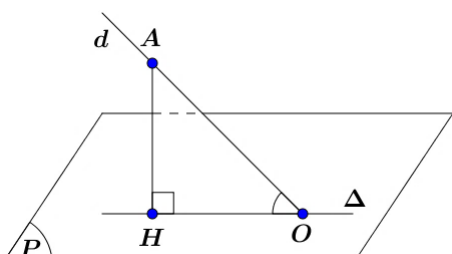
## VI. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

### 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì ta chọn một trong các cách chứng minh sau:

Cách 1 (Thường dùng)	Cách 2	Cách 3
$\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ b, c \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$	$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$	$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ a \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$
Cách 4	Cách 5	
$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \\ a \perp (Q) \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$	$\left. \begin{array}{l} (Q) \cap (R) = a \\ (P) \perp (Q) \\ (P) \perp (R) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$	

### 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

<p><b>Bước 1.</b> Xác định giao tuyến của đường thẳng <math>d</math> và mặt phẳng <math>(P)</math> là điểm <math>O</math>, tức là:</p> $d \cap (P) = \{O\}$	
<p><b>Bước 2.</b> Xác định hình chiếu vuông góc của điểm <math>A</math> (là điểm nằm trên đường thẳng <math>d</math> khác điểm <math>O</math>) trên mặt phẳng <math>(P)</math> là <math>H</math>, tức là chứng minh:</p> $AH \perp (P)$	
<p><b>Bước 3.</b> Xác định hình chiếu vuông góc của đường thẳng <math>d</math> trên mặt phẳng <math>(P)</math> là đường thẳng <math>\Delta</math> với <math>\Delta</math> là đường thẳng đi qua <math>H</math> và <math>O</math>, tức là:</p> $\left. \begin{array}{l} AH \perp \Delta = \{H\} \\ d \cap \Delta = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AOH \text{ vuông tại } H$	
<p><b>Bước 4.</b> Khi đó, góc giữa đường thẳng <math>d</math> và mặt phẳng <math>(P)</math> bằng góc giữa hai đường thẳng <math>d</math> và đường thẳng <math>\Delta</math> bằng góc <math>\widehat{AOH}</math>, tức là:</p> $(\widehat{d, (P)}) = (\widehat{d, \Delta}) = \widehat{AOH}$ <p><b>Chú ý.</b> Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông <math>AOH</math></p> $\sin \widehat{AOH} = \frac{AH}{AO}; \cos \widehat{AOH} = \frac{OH}{AO}; \tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH}; \cot \widehat{AOH} = \frac{OH}{AH}$	

### 3. Hai mặt phẳng vuông góc

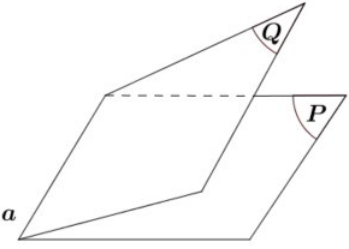
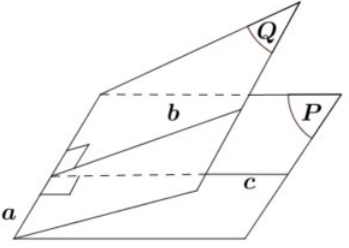
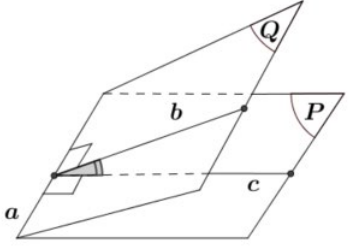
Để chứng minh hai mặt phẳng song song thì ta chọn một trong các cách sau để làm:

Cách 1 (Thường dùng)	Cách 2
$\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \subset (Q) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (P) \perp (Q)$	$\left. \begin{array}{l} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \\ \widehat{(a,b)} = 90^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow (P) \perp (Q)$

**Hệ quả:**

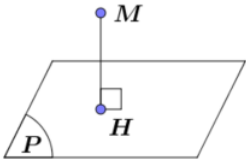
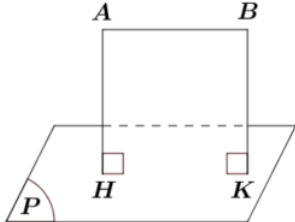
$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$	$\left. \begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ AB \perp (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow AB \subset (P)$	$\left. \begin{array}{l} (Q) \cap (R) = a \\ (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$
--	--	---

**4. Góc giữa hai mặt phẳng**

<p><b>Bước 1.</b> Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q), tức là:</p> $(P) \cap (Q) = a$	
<p><b>Bước 2.</b> Xác định đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với giao tuyến a và xác định đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (Q) đồng thời vuông góc với giao tuyến a, tức là:</p> $\left\{ \begin{array}{l} b \subset (P) \text{ và } b \perp a \\ c \subset (Q) \text{ và } c \perp a \end{array} \right.$	
<p><b>Bước 3.</b> Khi đó góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) chính là góc giữa 2 đường thẳng b và c, tức là:</p> $\left. \begin{array}{l} b \subset (P) \text{ và } b \perp a \\ c \subset (Q) \text{ và } c \perp a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \widehat{((P),(Q))} = \widehat{(b,c)}$	

**5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng**

Để tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng thì chọn một trong các cách sau để làm:

<p><b>Cách 1. (Trực tiếp)</b></p> <p>Tìm hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P) là điểm H, tức là chứng minh <math>MH \perp (P)</math> với <math>H \in (P)</math>. Do đó <math>d(M, (P)) = MH</math>.</p>	
<p><b>Cách 2. (Gián tiếp)</b></p> <p>Nếu <math>AB \parallel (P)</math> thì <math>d(A, (P)) = d(B, (P))</math></p>	

<p><b>Cách 3. (Gián tiếp)</b></p> <p>Nếu <math>AB</math> cắt <math>(P)</math> tại <math>I</math> thì <math>\frac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \frac{IA}{IB}</math></p>	
---	--

**6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$  thì chọn một trong các cách sau để làm:

<p><b>Cách 1:</b> Chọn mặt phẳng <math>(P)</math> chứa đường thẳng <math>a</math> và song song với <math>b</math>. Khi đó <math>d(a,b) = d(b,(P))</math>.</p>	
<p><b>Cách 2:</b> Dựng mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng là khoảng cách giữa hai đường thẳng <math>a</math> và <math>b</math>.</p>	
<p><b>Cách 3:</b> Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó. Ta xét 2 trường hợp sau:</p> <p><b>TH1:</b> <math>a</math> và <math>b</math> vừa chéo nhau vừa vuông góc với nhau</p> <p>+ Bước 1. Chọn mặt phẳng <math>(P)</math> chứa <math>b</math> và vuông góc với <math>a</math> tại <math>H</math>.</p> <p>+ Bước 2. Trong mặt phẳng <math>(P)</math> kẻ <math>HK \perp b</math>.</p> <p>+ Bước 3. Khi đó <math>HK</math> là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng <math>a</math> và <math>b</math> nên <math>d(a,b) = HK</math>.</p> <p><b>TH2:</b> <math>a</math> và <math>b</math> chéo nhau mà không vuông góc với nhau</p> <p>+ Bước 1. Chọn mặt phẳng <math>(P)</math> chứa <math>b</math> và song song với <math>a</math>.</p> <p>+ Bước 2. Dựng <math>d</math> là hình chiếu vuông góc của <math>a</math> lên <math>(P)</math> bằng cách lấy điểm <math>M \in a</math>, kẻ <math>MN \perp (P)</math>, lúc đó <math>d</math> là đường thẳng đi qua <math>N</math> và song song với <math>a</math>.</p> <p>+ Bước 3. Gọi <math>H = a \cap d</math>, dựng <math>HK \parallel MN</math>.</p> <p>+ Bước 4. Khi đó <math>HK</math> là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng <math>a</math> và <math>b</math> nên <math>d(a,b) = HK = MN</math>.</p> <p>Một cách giải khác của <b>TH2:</b></p> <p>+ Bước 1. Chọn mặt phẳng <math>(P) \perp a</math> tại <math>P</math>.</p> <p>+ Bước 2. Tìm hình chiếu vuông góc của <math>b</math> lên <math>(P)</math> là <math>d</math>.</p> <p>+ Bước 3. Trong mặt phẳng <math>(P)</math>, dựng <math>PQ \perp d</math>, từ <math>Q</math> dựng đường thẳng song song với <math>a</math> cắt <math>b</math> tại <math>H</math>, từ <math>H</math> dựng <math>HK \parallel PQ</math>.</p> <p>+ Bước 4. Khi đó <math>HK</math> là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng <math>a</math> và <math>b</math> nên <math>d(a,b) = HK = PQ</math>.</p>	