

35 BÀI TẬP HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Cho $\triangle ABC$ có $a = 12$, $b = 15$, $c = 13$

- Tính số đo các góc của $\triangle ABC$
- Tính độ dài các đường trung tuyến của $\triangle ABC$
- Tính S , R , r
- Tính h_a, h_b, h_c

HS: Tự giải

2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$, $AC = 8$, $A = 120^\circ$

- Tính diện tích $\triangle ABC$
- Tính cạnh BC và bán kính R

HS: Tự giải

3. Cho $\triangle ABC$ có $a = 8$, $b = 10$, $c = 13$

- $\triangle ABC$ có góc tù hay không?
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$
- Tính diện tích $\triangle ABC$

HS: Tự giải

4. Cho $\triangle ABC$ có $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$, $b = 2$ tính độ dài cạnh a , c bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và diện tích tam giác

HS: Tự giải

5. Cho $\triangle ABC$ $AC = 7$, $AB = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$ tính BC , S , h_a , R

HS: Tự giải

6. Cho $\triangle ABC$ có $m_b = 4$, $m_c = 2$ và $a = 3$ tính độ dài cạnh AB , AC

HS: Tự giải

7. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$, $AC = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính cạnh BC

HS: Tự giải

8. Tính bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ biết $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$

HS: Tự giải

9. Tính A của $\triangle ABC$ có các cạnh a , b , c thỏa hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$

HS: Tự giải

10. Cho $\triangle ABC$. CMR

- $$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$$
- $$c^2 = (a - b)^2 + 4S \frac{1 - \cos C}{\sin C}$$

$$c. S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$d. S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

$$e. a = b \cos C + c \cos B$$

$$f. \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

HS Tự giải

11. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ và M là điểm tùy ý. CMR

$$a. MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2$$

$$b. 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

HS Tự giải

12. Cho $\triangle ABC$ có $b + c = 2a$. CMR

$$a. \sin B + \sin C = 2 \sin A$$

$$b. \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

HS Tự giải

13. Cho $\triangle ABC$ biết $A(4\sqrt{3}, -1), B(0, 3), C(8\sqrt{3}, 3)$

a. Tính các cạnh và các góc còn lại của $\triangle ABC$

b. Tính chu vi và diện tích $\triangle ABC$

HS Tự giải

14. Cho $\triangle ABC$ biết $a = 40,6; B = 36^\circ 20'; C = 73^\circ$. Tính A, cạnh b, c của tam giác đó

HS Tự giải

15. Cho $\triangle ABC$ biết $a = 42,4m; b = 36,6m; C = 33^\circ 10'$. Tính A, B và cạnh c.

HS Tự giải

16. Để lắp đường dây cao thế từ vị trí A đến vị trí B phải tránh 1 ngọn núi, do đó người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10km, rồi nối từ vị trí C đến vị trí B dài 8km. Biết góc tạo bởi 2 đoạn dây AC và CB là 75° . Hỏi so với việc nối thẳng từ A đến B phải tốn thêm bao nhiêu m dây?

HS Tự giải

17. 2 vị trí A và B cách nhau 500m ở bên này bờ sông từ vị trí C ở bên kia bờ sông. Biết $CAB = 87^\circ, CBA = 62^\circ$. Hãy tính khoảng cách AC và BC.

HS Tự giải

Bài 18. Cho tam giác ABC có $BC = a, A = \alpha$ và hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau. Tính $S_{\triangle ABC}$.

Hướng dẫn giải:

Hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc

$$\text{với nhau thì } \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2$$

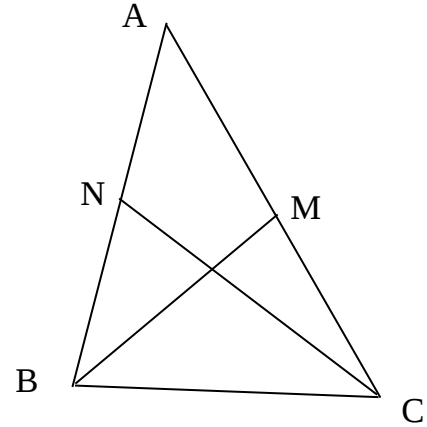
$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}\left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) = a^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{Mặt khác } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 5a^2 - 2bc \cos A \Rightarrow bc = \frac{2a^2}{\cos A} = \frac{2a^2}{\cos \alpha}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = a^2 \tan \alpha$$



Bài 19. Cho tam giác ABC. Gọi l_A, l_B, l_C lần lượt là độ dài các đường phân giác góc A, B, C. Chứng minh rằng.

a. $l_A = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$

b. $\frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

c. $\frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Hướng dẫn giải:

a. Trước hết chứng minh công thức $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

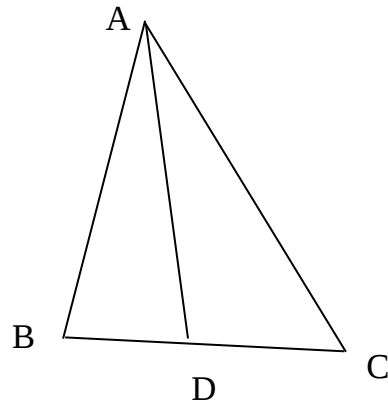
bằng sử dụng tam giác cân tại đỉnh A có $A = 2\alpha$ thông qua công thức diện tích để đi đến kết luận trên.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}cl_A \sin \frac{A}{2}, S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}bl_A \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{Mà } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \Rightarrow l_A = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

b. $\frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} = \frac{1}{2} \left(\frac{b+c}{bc} \right) = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$

Tương tự $\frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}, \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$



$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

c. Ta có $\frac{\cos \frac{A}{2}}{l_A} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{l_B} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_C} < \frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C}$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_A} + \frac{1}{l_B} + \frac{1}{l_C} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Bài 20. Cho tam giác ABC. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến đi qua A, B, C, $m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$. Chứng minh rằng

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4} \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

Hướng dẫn giải:

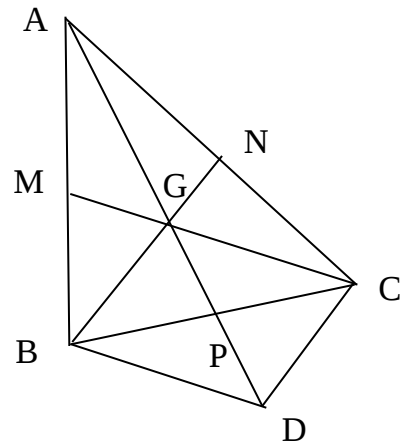
Gọi D là điểm đối xứng của A qua trọng tâm G. Ta có tứ giác GBDC là hình bình hành

Để thấy $S_{\Delta GBD} = S_{\Delta GBC} = S_{\Delta AGB} = S_{\Delta AGC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$

Mà ΔGBD có ba cạnh $\frac{2}{3} m_a, \frac{2}{3} m_b, \frac{2}{3} m_c$

$$\Rightarrow S_{\Delta GBD} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta GBD} = \frac{3}{4} \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$



Bài 21. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn có $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. Chứng minh rằng $S_{\square ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Với $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Hướng dẫn giải:

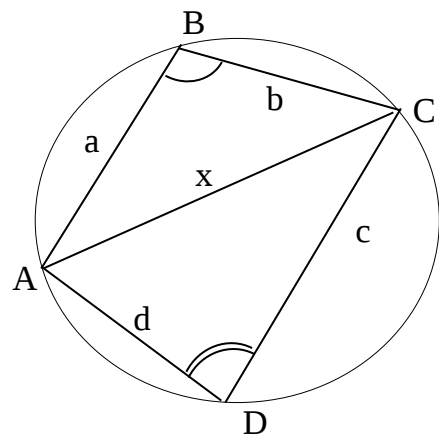
Do ABCD nội tiếp nên

$$\sin ABC = \sin ADC$$

$$\cos ABC = -\cos ADC$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} (ab + cd) \sin B$$

$$= \frac{1}{2} (ab + cd) \sqrt{1 - \cos^2 B}$$



Trong tam giác ABC có $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$

Trong tam giác ADC có $AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D \Leftrightarrow \cos B = \frac{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}$$

$$\text{Do đó } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(ab + cd)\sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{1}{2}(ab + cd)\sqrt{1 - \left(\frac{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4(ab + cd)^2 - [(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)]^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a + b + c - d}{2}\right)\left(\frac{a + b - c + d}{2}\right)\left(\frac{a - b + c + d}{2}\right)\left(\frac{-a + b + c + d}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)} \text{ Với } p = \frac{a + b + c + d}{2}$$

Bài 22. Cho tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = 0 \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2ac \cos B + 2bc \cos A + 2ab \cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$$

Bài 23. Cho tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c là $a = x^2 + x + 1, b = 2x + 1, c = x^2 - 1$ chứng minh rằng tam giác có một góc bằng 120° .

Hướng dẫn giải:

$$\text{Điều kiện } a, b, c \text{ là 3 cạnh của tam giác } \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 1 + 2x + 1 > x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Với $x > 1$ thì $a > b$ và $a > c$ nên a là cạnh lớn nhất

$$\text{Tính } \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ.$$

Bài 24. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$\text{a. } \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$$

$$b. \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Hướng dẫn giải:

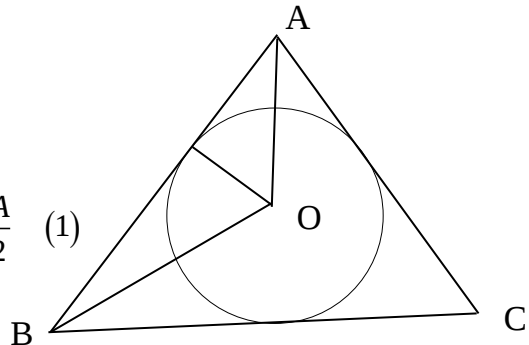
a. Sử dụng định lý sin và cosin.

b. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2}bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \quad (1)$$

Từ hình vẽ:

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = (p-a) \tan \frac{A}{2} \quad (2)$$



$$\text{Từ (1) và (2)} \quad \frac{(S_{\triangle ABC})^2}{p} = (p-a) \tan \frac{A}{2} bc \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = bc(p-a) \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Bài 25. Tam giác ABC có tính chất gì khi $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}(a+b-c)(a+c-b)$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Theo Hê rong } S_{\triangle ABC} = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow (a+b-c)^2 (a+c-b)^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

$$\Rightarrow (a+b-c)(a+c-b) = (a+b+c)(-a+b+c) \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \text{ Tam giác ABC vuông tại A}$$

Bài 26 Cho tam giác ABC. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } r = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{S^2}{pabc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$\text{Mà } \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{2p-a-b}{2} = \frac{c}{2}$$

$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{2p-a-c}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{2p-b-c}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8} \Rightarrow \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 27. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\text{a. } \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} \leq \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$$

$$\text{b. } 3S \geq 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$$

$$\text{c. } \sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

$$\text{d. } S^2 \leq \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a. BĐT} \Leftrightarrow \frac{2 - \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right) (\sin^2 A + \sin^2 B)$$

$$\text{b. } 3S \geq 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3abc}{4R} \leq 2R^2 \left(\frac{a^3}{8R^3} + \frac{b^3}{8R^3} + \frac{c^3}{8R^3} \right) \Leftrightarrow 3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$$

$$\text{c. Từ } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 > x^2 + y^2 + z^2$$

Nên x, y, z dương thì $x+y+z > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ áp dụng vào CM

$$+ \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} > \sqrt{p-a+p-b+p-c} = \sqrt{p}$$

$$+ (\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2 \leq 3(p-a+p-b+p-c) = 3p$$

$$\text{d. } S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b-c}{2} \right) \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \left(\frac{-a+b+c}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{16} [(b+c)^2 - a^2] [a^2 - (b-c)^2] \leq \frac{1}{16} [(b+c)^2 - a^2] a^2$$

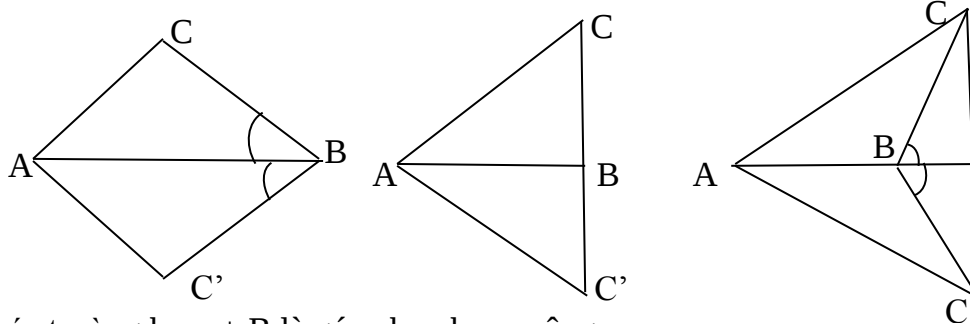
$$= \frac{1}{16} (b^2 + c^2 + 2bc - a^2) a^2 \leq \frac{1}{16} (2b^2 + 2c^2 - a^2) a^2$$

$$= \frac{1}{16} (2b^2 a^2 + 2c^2 a^2 - a^4) \leq \frac{1}{16} (a^4 + b^4 + c^4)$$

Bài 28. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$

Hướng dẫn giải:

Dựng tam giác ABC' đối xứng với ABC qua AB



Xét các trường hợp $\angle B$ là góc nhọn hay vuông,

$\angle B$ là góc tù

Bài 29. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } |a-b| < c \Leftrightarrow (a-b)^2 < c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 < 2ab$$

Bài 30. Trong các tam giác ABC có chu vi là $2p$ không đổi chỉ ra tam giác có tổng lập phương các cạnh bé nhất.

Hướng dẫn giải:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^4 \leq 9(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 9(\sqrt{a}\sqrt{a^3}\sqrt{b}\sqrt{b^3}\sqrt{c}\sqrt{c^3})^2$$

$$\leq (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c)} = \frac{1}{9}(a+b+c)^3 = \frac{8}{9}p^3 \text{ khi tam giác đều}$$

Bài 31. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$

Hướng dẫn giải:

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{a^2 - (b-c)^2}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{b^2 - (c-a)^2}, \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{c^2 - (a-b)^2}$$

$$\text{Nên } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{a^2 - (b-c)^2} + \frac{1}{b^2 - (c-a)^2} + \frac{1}{c^2 - (a-b)^2}$$

$$= \frac{1}{(a-b+c)(a+b-c)} + \frac{1}{(b-c+a)(b+c-a)} + \frac{1}{(c-a+b)(c+a-b)}$$

$$= \frac{1}{4(p-b)(p-c)} + \frac{1}{4(p-c)(p-a)} + \frac{1}{4(p-a)(p-b)}$$

$$= \frac{p}{4(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{4S^2} = \frac{1}{4r^2}$$

Bài 32. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

b. $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

c. $\frac{h_b}{h_a^2} + \frac{h_c}{h_b^2} + \frac{h_a}{h_c^2} > \frac{1}{r}$

Hướng dẫn giải:

a. $\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{b+c-a+c+a-b}{2} = c$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \frac{c+a-b+a+b-c}{2} = a$$

$$\sqrt{(b+c-a)(b+a-c)} \leq \frac{b+c-a+b+a-c}{2} = b$$

$$\Rightarrow (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc \Leftrightarrow \frac{abc}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \geq 1$$

Mà $\frac{a}{(b+c-a)} + \frac{b}{(a+c-b)} + \frac{c}{(a+b-c)} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a}{b+c-a} \cdot \frac{b}{a+c-b} \cdot \frac{c}{a+b-c}} = 3$

b. $p = \frac{1}{2}(a+b+c) \Rightarrow \frac{p}{S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{p}{S}} = \frac{1}{\frac{a}{2S}} + \frac{1}{\frac{b}{2S}} + \frac{1}{\frac{c}{2S}} \Leftrightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

c. $\Leftrightarrow \frac{2S}{b} \left(\frac{a}{2S} \right)^2 + \frac{2S}{c} \left(\frac{b}{2S} \right)^2 + \frac{2S}{a} \left(\frac{c}{2S} \right)^2 \geq \frac{1}{r}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{2S}{r} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 2p$$

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow \frac{a^2}{b} + b \geq 2a \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} \geq 2a - b$

Tương tự $\frac{b^2}{c} \geq 2b - c, \frac{c^2}{a} \geq 2c - a$

Cộng lại ta có $\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c = 2p$

Bài 33. Cho tam giác ABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$. Chứng minh rằng $A \leq 60^\circ$.

Hướng dẫn giải:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}}{2bc} = \frac{b^2 + c^2}{4bc} \geq \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

Bài 34. Cho tam giác ABC có $a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$. Chứng minh rằng có một góc tù.

Hướng dẫn giải:

$$a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow c^4 = \left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)^3 = a^4 + b^4 + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\geq a^4 + b^4 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right) \geq a^4 + b^4 + 2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$$

$$\Rightarrow c^2 > a^2 + b^2 \text{ Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \Rightarrow C \geq 90^\circ$$

Bài 35. Tam giác ABC có $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$ thì có tính chất gì?

Hướng dẫn giải:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 36 \frac{S^2}{p^2} = 36 \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = 36 \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}\sqrt{(p-a)(p-b)}}{p}$$

$$\text{Ta có } 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq (2p-b+2p-c) = a$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}\sqrt{(p-a)(p-b)}}{p} \leq \frac{abc}{8p}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{9abc}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 9abc$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9abc$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác ABC có $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$ thì tam giác ABC đều.