Bài giảng Nhập môn
Lí thuyết Xác suất - Thống kê
Dành cho sinh viên ngành toán

Ngô Hoàng Long

Khoa Toán Tin - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

https://sites.google.com/site/ngohoanglongshomepage

Mục lục

Chương 1

Không gian xác suất

Ngày nay,

1.1 Định nghĩa không gian xác suất

1.1.1 Biến cố ngẫu nhiên và xác suất

Giả sử Ω là một tập khác rỗng nào đó, ta kí hiệu 2^{Ω} tập tất cả các tập con của Ω bao gồm cả tập rỗng $\emptyset$ và Ω. Giả sử $\mathcal{A}$ là một tập con của 2^{Ω}.

Định nghĩa 1.1. *$\mathcal{A}$ được gọi là một* đại số *nếu*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$ và $\Omega \in \mathcal{A}$;*

2. *Nếu $A \in \mathcal{A}$ thì $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;*

3. *$\mathcal{A}$ đóng đối với phép giao và phép hợp hữu hạn: tức là, với mọi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, ta có $\cup_{i=1}^{n} A_i$ và $\cap_{i=1}^{n} A_i$ đều thuộc $\mathcal{A}$.*

$\mathcal{A}$ được gọi là một σ-đại số *nếu nó thỏa mãn điều kiện* $1, 2$ *và*

4. *$\mathcal{A}$ đóng đối với phép giao và phép hợp đếm được: tức là, với mọi dãy $A_i, i = 1, 2, \ldots$ các phần tử của $\mathcal{A}$, ta có $\cup_{i \geq 1} A_i$ và $\cap_{i \geq 1} A_i$ đều thuộc $\mathcal{A}$.*

Dễ thấy mọi σ-đại số đều là đại số. Tuy nhiên tồn tại các đại số mà không phải là σ-đại số.

Ví dụ 1.2. *Giả sử Ω là một tập gồm vô hạn phần tử và $\mathcal{A}$ là họ tất cả các tập con A của Ω sao cho A hoặc $\Omega \backslash A$ chỉ có hữu hạn phần tử. Khi đó $\mathcal{A}$ là đại số nhưng không phải σ-đại số.*

Định nghĩa 1.3. *Giả sử $\mathcal{C} \subset 2^{\Omega}$,* σ-đại số sinh bởi $\mathcal{C}$, *kí hiệu là $\sigma(\mathcal{C})$ là σ-đại số bé nhất chứa $\mathcal{C}$.*

$\sigma(\mathcal{C})$ luôn tồn tại vì 2^{Ω} là một σ-đại số và giao của mỗi họ bất kì các σ-đại số cũng là một σ-đại số.

Ví dụ 1.4. 1. *$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$: σ-đại số tầm thường.*

2. *Nếu A là một tập con của Ω thì $\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.*

3. *Nếu $\Omega = \mathbb{R}^d$ thì σ-đại số sinh bởi tất cả các tập mở trên Ω được gọi là σ-đại số Borel, kí hiệu là $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Định lí 1.5. *σ-đại số Borel trên $\mathbb{R}^d$ sinh bởi các nửa đoạn có dạng $\prod_{i=1}^{d}(-\infty, a_i]$ với $a_i \in \mathbb{Q}$ với mọi $i = 1, \ldots d$. ($\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ).*

Chứng minh. □

Định nghĩa 1.6. *Nếu $\mathcal{A}$ là một σ-đại số trên Ω thì $(\Omega, \mathcal{A})$ được gọi là* không gian đo.

Định nghĩa 1.7. *Giả sử $(\Omega, \mathcal{A})$ là một không gian đo. Ánh xạ $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ được gọi là một* độ đo xác suất *nếu*

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$*;*

(2) với mọi dãy gồm đếm được các tập con (A_i) của $\mathcal{A}$ và đôi một không giao nhau (tức là $A_m \cap A_n = \emptyset$) ta có

$$\mathbb{P}\Big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Khi đó ta gọi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất*, tập Ω là* không gian mẫu. *Mỗi phần tử $w \in \Omega$ gọi là một* biến cố sơ cấp. *Mỗi phần tử $A \in \mathcal{A}$ gọi là một* biến cố *và giá trị của $\mathbb{P}(A)$ được gọi là* xác suất *của biến cố A. Nếu hai biến cố A và B thỏa mãn $B \subset A$ thì B được gọi là* thuận lợi *cho A. Hai biến cố A và B được gọi là* xung khắc *nếu $A \cap B = \emptyset$ và được gọi là* đối lập *nếu $A = \Omega \backslash B$.*

Tính chất thứ hai được gọi là tính *đếm được cộng tính* của độ đo xác suất $\mathbb{P}$. Nếu ánh xạ $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ thỏa mãn (1) và

(2′) Với mọi $A, B \in \mathcal{A}$ thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$ ta có

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

thì ta gọi $\mathbb{P}$ là độ đo *hữu hạn cộng tính*.

Mệnh đề 1.8. *Nếu $\mathbb{P}$ là độ đo xác suất trên $(\Omega, \mathcal{A})$ thì*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. $\mathbb{P}$ *là hữu hạn cộng tính;*
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *với mọi* $A \in \mathcal{A}$;
4. *Nếu* $A, B \in \mathcal{A}$ *và* $A \subset B$ *thì* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;

1.1.2 Tính liên tục của độ đo xác suất*

Tính hữu hạn cộng tính không kéo theo đếm được cộng tính. Tuy nhiên ta có các khẳng định sau.[1]

Định lí 1.9. *Giả sử $\mathcal{A}$ là một σ-đại số và $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ thỏa mãn $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ và là hữu hạn cộng tính. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) $\mathbb{P}$ *là đếm được cộng tính;*

(ii) *Nếu* $A_n \in \mathcal{A}$ *và* $A_n \downarrow \emptyset$ *thì* $\mathbb{P}(A_n) \downarrow 0$;

(iii) *Nếu* $A_n \in \mathcal{A}$ *và* $A_n \downarrow A$ *thì* $\mathbb{P}(A_n) \downarrow \mathbb{P}(A)$;

(iv) *Nếu* $A_n \in \mathcal{A}$ *và* $A_n \uparrow \Omega$ *thì* $\mathbb{P}(A_n) \uparrow 1$;

[1] Định lí sau nên được bỏ qua ở những lần đọc đầu tiên

(v) Nếu $A_n \in \mathcal{A}$ và $A_n \uparrow A$ thì $\mathbb{P}(A_n) \uparrow \mathbb{P}(A)$.

Chứng minh. Kí hiệu $A_n \downarrow A$ nghĩa là $A_{n+1} \subset A_n$ với mọi n và $A = \cap_n A_n$. Tương tự $A_n \uparrow A$ nghĩa là $A_n \subset A_{n+1}$ và $A \cup_n A_n$. Ta sẽ lần lượt chứng minh

$$(i) \Leftrightarrow (v) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v).$$

$(i) \Rightarrow (v)$: Giả sử $A_n \uparrow A$. Xét dãy biến cố $B_1 = A_1$ và $B_n = A_{n+1} \backslash A_n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó (B_n) là dãy biến cố đôi một rời nhau và $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ và $A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$. Do đó

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{k\geq 1} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k).$$

Vậy nên

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A).$$

$(v) \Rightarrow (i)$: Giả sử $(A_n)_{n\geq 1}$ là dãy biến cố đôi một xung khắc. Đặt $B_n = \cup_{k=1}^{n} A_k$. Ta có $B_n \uparrow \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Do đó

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

$(v) \Rightarrow (iii)$: Giả sử $A_n \downarrow A$. Đặt $B_n = A_n^c$. Vì $B_n \uparrow A^c$ nên $\mathbb{P}(B_n) \uparrow \mathbb{P}(A^c)$. Do đó

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(B_n) \downarrow 1 - \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A).$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ là hiển nhiên.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: Giả sử $A_n \uparrow \Omega$, khi đó $A_n^c \downarrow \emptyset$ nên $\mathbb{P}(A_n^c) \downarrow 0$. Do đó $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n^c) \uparrow 1$.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Giả sử $A_n \uparrow A$. Xét dãy biến cố $B_n = A_n \cup A^c$. Ta có $B_n \uparrow \Omega$ nên $\mathbb{P}(B_n) \uparrow 1$. Do đó

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(A^c) \uparrow 1 - \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A).$$

□

Với mỗi $A \in 2^\Omega$, ta kí hiệu hàm chỉ tiêu của tập A bởi

$$\mathbb{I}_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } w \in A, \\ 0 & \text{nếu } w \notin A. \end{cases}$$

Ta nói rằng dãy $A_n \in \mathcal{A}$ hội tụ đến A, kí hiệu là $A_n \to A$ nếu $\mathbb{I}_{A_n}(w) \to \mathbb{I}_A(w)$ với mọi $w \in \Omega$. Ta cũng sẽ sử dụng các kí hiệu sau

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Do $\mathcal{A}$ là σ-đại số nên nếu $A_n \in \mathcal{A}$ với mọi n thì $\limsup_n A_n$ và $\liminf_n A_n$ cũng thuộc $\mathcal{A}$. Hơn nữa, nếu $A_n \to A$ thì $A = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$ nên $A \in \mathcal{A}$.

Định lí 1.10. *Giả sử* $\mathbb{P}$ *là độ đo xác suất và dãy biến cố* $A_n \to A$*. Khi đó* $A \in \mathcal{A}$ *và* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

Chứng minh. Đặt $B_n = \cap_{k\geq n} A_k$ và $C_n = \cup_{k\geq n} A_k$. Vì $B_n \uparrow A$ và $C_n \downarrow A$ nên $\mathbb{P}(A) = \lim_n \mathbb{P}(B_n) = \lim_n \mathbb{P}(C_n)$. Mà $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(C_n)$ với mọi n nên $\lim_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$. □

1.2 Xác suất trên không gian trạng thái rời rạc

Trong mục này ta giả sử Ω là tập có hữu hạn hoặc đếm được phần tử và xét $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Để xác định một độ đo xác suất $\mathbb{P}$ trên $(\Omega, \mathcal{A})$ ta chỉ cần xây dựng một ánh xạ $p : \Omega \to [0, 1]$ thỏa mãn $\sum_{w\in\Omega} p_w = 1$. Khi đó với mỗi $A \in \mathcal{A}$, xác suất của biến cố A là

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{w\in A} p_w.$$

Lưu ý là các tổng trên là hoàn toàn xác định vì mỗi số hạng đều không âm và số số hạng là không quá đếm được.

Định nghĩa 1.11. *Xác suất* $\mathbb{P}$ *trên tập hữu hạn* Ω *được gọi là* đều *nếu* $p_w = \mathbb{P}(\{w\})$ *không phụ thuộc vào* w*.*

Từ định nghĩa trên ta suy ra rằng nếu xác suất $\mathbb{P}$ là đều thì với mọi tập con A của Ω,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{số phần tử của tập } A}{\text{số phần tử của } \Omega}.$$

Ví dụ 1.12. *Gieo đồng thời hai con xúc xắc và quan sát số chấm xuất hiện ở mặt trên của mỗi con. Tập tất cả các kết quả có thể có của phép thử là*

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\},$$

trong đó i và j lần lượt là số chấm xuất hiện ở mặt trên con xúc xắc thứ nhất và thứ hai. Ω *gồm* 36 *biến cố sơ cấp. Nếu hai con xúc xắc là cân đối và đồng chất thì các biến cố sơ cấp sẽ có cùng khả năng xảy ra và bằng* $1/36$. *Xét biến cố*

$$A = \text{“xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”},$$

Khi đó có tất cả 6 *biến cố sơ cấp thuận lợi cho A nên* $\mathbb{P}(A) = 6/36 = 1/6$.

Ví dụ 1.13. *Trong hộp có* 10 *bi trắng và* 10 *bi đỏ. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời* 5 *viên bi một cách ngẫu nhiên. Gọi X là số bi trắng trong* 5 *bi vừa lấy. Ta thấy X có thể nhận các giá trị từ* 0 *đến* 5 *và ta muốn xác định xác suất để X nhận mỗi giá trị này. Ta thấy số cách lấy ra* 5 *bi từ hộp là* C_{20}^5 *trong khi đó số cách lấy ra* 5 *bi mà có k bi trằng là*

$C_{10}^{k}C_{10}^{5-k}$. *Giả sử các viên bi có cùng khả năng được lấy ra, khi đó*

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{C_{10}^{k}C_{10}^{5-k}}{C_{20}^{5}}, \quad k = 0, \ldots, 5. \tag{1.1}$$

Ta gọi X là một biến ngẫu nhiên và phân phối của X được xác định bởi (1.1).

1.3 Xác suất điều kiện

Trong thực tế người ta thường phải tính xác suất để một sự kiện nào đó xảy ra dựa trên việc một sự kiện khác có liên quan đã xảy ra. Ta xét ví dụ đơn giản sau đây: Xét phép thử gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt chẵn chấm và B là biến cố số chấm xuất hiện chia hết cho 3. Ta có $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ và $B = \{3, 6\}$. Do vậy $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$ và $\mathbb{P}(AB) = 1/6$. Nếu biết rằng B đã xảy ra, tức là có hai khả năng: mặt xuất hiện là 3 chấm hoặc 6 chấm, thì A xảy ra khi mặt xuất hiện có 6 chấm. Do đó xác suất của A với điều kiện B đã xảy ra là $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$. Ta nhận thấy giá trị này cũng bằng $\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$. Tương tự ta cũng có xác suất để B xảy ra biết rằng A đã xảy ra là $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$. Điều này đưa ta đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.14. *Giả sử A và B là hai biến cố bất kì, trong đó $\mathbb{P}(B) > 0$. Khi đó xác suất để biến cố A xảy ra biến rằng biến cố B đã xảy ra là*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Từ định nghĩa xác suất điều kiện ta suy ra công thức nhân xác suất sau

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B).$$

Định nghĩa 1.15. *Hệ các biến cố $\{A_1, \ldots, A_n\}$ được gọi là* đầy đủ *nếu nó là một phân hoạch của Ω trong $\mathcal{A}$, tức là*

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ *với mọi* $i \neq j$;

2. $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Giả sử $\{A_1, \ldots, A_n\}$ là một hệ đầy đủ các biến cố với $\mathbb{P}(A_i) > 0$ với mọi i. Khi đó với biến cố B bất kì ta có $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(BA_i)$. Áp dụng công thức nhân xác suất ta thu được công thức xác suất toàn phần sau

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Từ đây ta cũng thu được công thức Bayes

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Ví dụ 1.16. *Trong hộp có* 10 *lá thăm, trong đó chỉ có* 1 *lá trúng thưởng. Mười người chơi lần lượt lấy ra một cách ngẫu nhiên (không hoàn lại) từng lá thăm từ hộp cho đến khi có người đầu tiên lấy được lá thăm trúng thưởng thì dừng lại. Tính xác suất trúng thưởng của từng người chơi? Có nhận xét gì về kết quả thu được?*

Kết quả rút thăm sẽ thay đổi thế nào nếu trong 10 *lá thăm có* 2 *lá trúng thưởng?*

Ví dụ 1.17. *Một xét nghiệm HIV cho kết quả dương tính với* 90% *các trường hợp thực sự nhiễm virus và cho kết quả âm tính với* 80% *các trường hợp thực sự không nhiễm virus. Biết rằng tỉ lệ người nhiễm HIV trong một cộng đồng nào đó là* 1%. *Một người trong cộng đồng đó có kết quả xét nghiệm dương tính. Tính xác suất để người đó thực sự bị nhiễm virus.*

Kết quả trên thay đổi thế nào nếu tỉ lệ người nhiễm HIV trong cộng đồng là 0.1%.

Giải: Gọi DT và AT lần lượt là biến cố người đó có kết quả xét nghiệm là dương tính và âm tính. Gọi B và K lần lượt là biến cố người đó thực sự nhiễm virus và không nhiễm virus. Ta có

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{100}, \ \mathbb{P}(K) = \frac{99}{100}, \ \mathbb{P}(DT|B) = \frac{9}{10}, \ \mathbb{P}(AT|K) = \frac{8}{10}.$$

Vậy xác suất người đó thực sự bị nhiễm virus với điều kiện kết quả xét nghiệm là dương tính là

$$\mathbb{P}(B|DT) = \frac{\mathbb{P}(DT|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(DT|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(DT|K)\mathbb{P}(K)} = \frac{\frac{9}{10}\frac{1}{100}}{\frac{9}{10}\frac{1}{100} + \frac{2}{10}\frac{99}{100}} = \frac{1}{23}.$$

1.4 Sự độc lập

Định nghĩa 1.18. *1. Hai biến cố A và B được gọi là* độc lập *với nhau nếu*

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{1.2}$$

2. Một họ (có thể vô hạn) các biến cố $(A_i)_{i\in I}$ được gọi là độc lập từng đôi *nếu*

$$\mathbb{P}(A_iA_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \text{ với mọi } i \neq j \in I. \tag{1.3}$$

3. Một họ (có thể vô hạn) các biến cố $(A_i)_{i\in I}$ được gọi là độc lập trong toàn thể *nếu*

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\dots A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\dots\mathbb{P}(A_{i_n}) \tag{1.4}$$

với mọi tập con gồm hữu hạn các phần tử phân biệt $\{i_1, \dots, i_n\}$ của I.

Ta có thể dễ dàng kiểm chứng được rằng nếu A và B độc lập thì

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) = \mathbb{P}(A),$$

tức là xác suất để A xảy ra không phụ thuộc vào việc B đã xảy ra hay không.

Định nghĩa 1.19. *Dãy n phép thử $G_1, \ldots, G_n$ được gọi là* độc lập *nếu mọi dãy biến cố $(A_i)_{i\geq 1}$, trong đó A_i là kết quả của phép thử G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, đều độc lập.*

Ví dụ 1.20. *Hai bạn An và Bình thi đấu một trận cầu lông gồm 3 hiệp. Ai thắng ít nhất hai hiệp thì thắng chung cuộc. Biết rằng kết quả của mỗi hiệp chơi đều độc lập với nhau và xác suất để An thắng mỗi hiệp đều bằng $p \in (0, 1)$.*

1. *Tính xác suất để An thắng chung cuộc.*
2. *Tính xác suất để An thắng hiệp thứ nhất biết rằng An thắng chung cuộc.*

Giải: Gọi A là biến cố An thắng chung cuộc và A_i là biến cố An thắng ở hiệp thứ i. Biến cố A xảy ra nếu An thắng 2 trận hoặc cả 3 trận, tức là

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1^c A_2 A_3) + \mathbb{P}(A_1 A_2^c A_3) + \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3^c) + \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3).$$

Vì kết quả các hiệp chơi là độc lập với nhau nên A_1, A_2, A_3 là các biến cố độc lập. Do đó

$$\mathbb{P}(A) =)\mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)+\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3)+\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3^c)+\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}($$

Vì $\mathbb{P}(A_i) = p$ với mọi $i = 1, 2, 3$ nên

$$\mathbb{P}(A) = 3p^2(1-p) + p^3 = p^2(3-2p).$$

Xác suất để An thắng hiệp thứ nhất biết rằng An thắng chung cuộc là

$$\mathbb{P}(A_1|A) = \frac{\mathbb{P}(AA_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2p^2(1-p)+p^3}{p^2(3-2p)} = \frac{2-p}{3-2p}.$$

Bài tập

Đại số và σ-đại số

1.1. *Giả sử Ω là một tập hữu hạn. CMR tập tất cả các tập con của Ω cũng gồm hữu hạn phần tử và là một σ-đại số.*

1.2. *Giả sử $(E, \mathcal{E})$ là một không gian đo và $f : \Omega \to E$. Gọi*

$$\mathcal{F} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}.$$

CMR $\mathcal{F}$ cũng là một σ-đại số trên Ω.

1.3. *Giả sử $\Omega = \mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên và $\mathcal{A}$ là họ tất cả các tập con A của Ω sao cho A hoặc $\Omega \backslash A$ chỉ có hữu hạn phần tử. CMR $\mathcal{A}$ là đại số nhưng không phải σ-đại số.*

1.4. *Giả sử $\Omega = [0, 1)$ và $\mathcal{A}$ là họ các tập con A của Ω sao cho A có thể biểu diễn dưới dạng hợp của một số hữu hạn các nửa đoạn $[a, b)$ với $0 \le a < b < 1$. CMR $\mathcal{A}$ là đại số nhưng không phải σ-đại số.*

Không gian xác suất

1.5. *Giả sử* $A, B, C \in \mathcal{A}$*. CMR*

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$.
2. $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(ABC)$.
3. $|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)| \leq \frac{1}{4}$.
4. $\mathbb{P}(A \Delta B) \leq \mathbb{P}(A \Delta C) + \mathbb{P}(C \Delta B)$.

1.6. *Giả sử* $(\mathcal{G}_\alpha)_{\alpha \in I}$ *là một họ các* σ*-đại số trên* Ω*. Khi đó* $\cap_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha$ *cũng là một* σ*-đại số.*

Xác suất điều kiện

1.7. *Giả sử* $\mathbb{P}(B) > 0$*. Khi đó ánh xạ* $A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ *từ* $\mathcal{A} \to [0, 1]$ *xác định một độ đo xác suất mới trên* A*, gọi là* độ đo xác suất với điều kiện B.

1.8. *Giả sử* $A, B, C \in \mathcal{A}$ *với* $\mathbb{P}(C) > 0$*. CMR*

$$\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(AB|C).$$

1.9. *Giả sử* $A_1, \ldots, A_n$ *là dãy các biến cố thuộc* $\mathcal{A}$ *thỏa mãn* $\mathbb{P}(A_1 \ldots A_{n-1}) >$

0. *Khi đó*

$$\mathbb{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \ldots A_{n-1}).$$

1.10. *Hộp thứ nhất có 4 bi xanh, 6 bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 bi xanh và 7 bi đỏ. Chọn ngẫu nhiên một trong hai hộp rồi từ đó lấy ra 2 viên bi.*

1. *Tính xác suất để 2 bi lấy ra cùng có màu đỏ.*
2. *Biết rằng 2 bi lấy ra cùng có màu đỏ, tính xác suất để cả 2 bi đều thuộc hộp thứ nhất.*

Giải: Gọi $A_i, i = 1, 2$ là biến cố hộp thứ i được chọn. Gọi B là biến cố cả 2 bi lấy ra cùng có màu đỏ. Vì hai hộp có cùng khả năng được chọn nên $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$. Lại do $\{A_1, A_2\}$ lập thành một hệ đầy đủ nên áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta được

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\mathbb{P}(A_2) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2}\frac{1}{2} + \frac{C_7^2}{C_{10}^2}\frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

Xác suất để bi lấy ra thuộc hộp thứ nhất với điều kiện cả 2 đều có màu đỏ là

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{5}{12}.$$

Chương 2

Biến ngẫu nhiên

2.1 Biến ngẫu nhiên trên không gian trạng thái rời rạc

2.1.1 Định nghĩa

Trong tiết này ta lại giả sử Ω là tập không quá đếm được và $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Một *biến ngẫu nhiên* X là một ánh xạ từ Ω vào $\mathbb{R}$. Mỗi bnn là một quan sát về kết quả của phép thử. *Phân phối* của bnn X là

$$\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(\{w : X(w) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}[X \in A].$$

Vì Ω có không quá đếm được trạng thái nên tập giá trị của X cũng là không quá đếm được. Giả sử X nhận các giá trị là $x_1, x_2, \ldots$. Khi đó phân phối của X hoàn toàn có thể được xác định thông qua $p_i^X = \mathbb{P}[X = x_i],\ i \geq 1$ bởi công thức

$$\mathbb{P}^X(A) = \sum_{x_i \in A} \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{x_i \in A} p_i^X.$$

Ta cũng có thể viết phân phối của X dưới dạng bảng

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$\mathbb{P}[X = x]$	p_1^X	p_2^X	$\dots$	p_n^X	$\dots$

Định nghĩa 2.1. *Giả sử X là bnn nhận các giá trị là $x_1, x_2, \dots$. Khi đó, ta gọi* kì vọng *của bnn X là đại lượng*

$$\mathbb{E}[X] := \sum_i x_i \mathbb{P}[X = x_i] = \sum_i x_i p_i^X$$

nếu tổng trên có nghĩa, tức là khi một trong các trường hợp sau được thỏa mãn

- *Ω có hữu hạn phần tử;*
- *chuỗi $\sum_i |x_i| p_i^X < \infty$;*
- *$x_i \geq 0$ với mọi i (trong trường hợp này $\mathbb{E}X$ có thể nhận giá trị $+\infty$.*

Nhận xét 1. *Nhắc lại là do Ω là rời rạc nên ta có thể gọi p_w là xác suất để biến cố sơ cấp $w \in \Omega$ xảy ra. Khi đó kì vọng của X được xác định như sau*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{w \in \Omega} X(w) p_w.$$

Ta thấy kì vọng $\mathbb{E}[X]$ chính là giá trị trung bình (theo trọng số p_w) của các giá trị mà X có thể nhận. Đặc biệt nếu X đồng nhất bằng hằng số c nào đó thì $\mathbb{E}[X] = c$.

Kí hiệu $\mathcal{L}^1$ là không gian tất cả các bnn có kì vọng hữu hạn trên $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ta có các tính chất đơn giản sau

Định lí 2.2. *Giả sử $X, Y \in \mathcal{L}^1$. Ta có các khẳng định sau*

1. *$\mathcal{L}^1$ là một không gian véc tơ và*

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y], \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

2. *Nếu $X \geq 0$ thì $\mathbb{E}[X] \geq 0$. Hơn nữa, nếu $X \geq Y$ thì $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$.*

3. *Nếu Z là bị chặn thì $Z \in \mathcal{L}^1$. Hơn nữa, nếu bnn Z' thỏa mãn $|Z'| \leq X$ thì $Z' \in \mathcal{L}^1$.*

4. *Nếu $X = \mathbb{I}_A$ là hàm chỉ tiêu của tập A thì $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(A)$.*

5. *Giả sử $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Khi đó*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i^X = \sum_{w \in \Omega} \varphi(X(w)) p_w$$

   nếu tổng trên có nghĩa.

Nhận xét 2. *Ta thấy nếu $\mathbb{E}[X^2] = \sum_i x_i^2 p_i^X < \infty$ thì*

$$\mathbb{E}[|X|] = \sum_i |x_i| p_i^X \leq \frac{1}{2} \sum_i (|x_i|^2 + 1) p_i^X = \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X^2] + 1) < \infty.$$

Định nghĩa 2.3. Phương sai *của bnn X là*

$$DX = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Áp dụng tính chất tuyến tính của kì vọng, ta có

$$DX = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2,$$

và do đó

$$DX = \sum_i x_i^2 p_i^X - \Big(\sum_i x_i p_i^X\Big)^2.$$

2.1.2 Ví dụ

Phân phối nhị thức $B(n, p)$

Trong hộp có L bi trắng và M bi vàng. Thực hiện phép thử sau: lấy ra ngẫu nhiên từ hộp một bi, ghi lại màu của nó rồi trả lại hộp. Lặp lại phép thử n lần và gọi X là số bi vàng trong n bi đã được lấy ra đó. Ta sẽ đi tìm phân phối xác suất của bnn X.

Trước hết ta xác định không gian xác suất của phép thử. Gọi các viên bi trắng là $T_1, T_2, \ldots, T_L$ và các viên bi vàng là $V_1, \ldots, V_M$. Không gian xác suất là

$$\Omega = \{(w_1, \ldots, w_n) : w_i \in \{T_1, \ldots, T_L, V_1, \ldots, V_M\},\ i = 1, \ldots, n\}$$

cùng với độ đo xác suất đều. Ta có số các phần tử của Ω là $(L + M)^n$. Số lượng phần tử của tập $\{w \in \Omega : X(w) = k\}$ bằng

$C_n^k M^k L^{n-k}$ với $k = 0, \ldots, n$. Do vậy

$$\mathbb{P}[X = k] = C_n^k \Big(\frac{M}{M+L}\Big)^k \Big(\frac{L}{M+L}\Big)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Đặt $p = \frac{M}{M+L}$ ta có phân phối của X là

$$\mathbb{P}[X = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ta gọi phân phối của X là *phân phối nhị thức* với cỡ n và xác suất p, kí hiệu là $X \sim B(n, p)$. Một cách tổng quát, $B(n, p)$ là phân phối của số lần thành công trong một dãy n phép thử độc lập liên tiếp, trong đó xác suất thành công của mỗi một phép thử đều bằng $p \in [0, 1]$.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 + np,\end{aligned}$$

vậy nên $DX = np(1-p)$.

Phân phối hình học

Thực hiện nhiều lần một dãy các phép thử độc lập cho đến khi thành công thì dừng lại. Giả sử xác suất thành công ở mỗi lần thử đều bằng nhau và bằng p. Gọi X là số phép thử trước khi thành công lần đầu tiên. Bnn X được gọi là có phân phối hình học với tham số $p \in [0,1]$ và

$$\mathbb{P}[X = n] = p(1-p)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Tính toán đơn giản, ta được

$$\mathbb{E}X = \frac{1-p}{p}, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

Phân phối Poisson $Poi(\lambda)$

Bnn X được gọi là có phân phối Poisson với tham số $\lambda > 0$, kí hiệu là $X \sim Poi(\lambda)$ nếu X nhận giá trị trong $\mathbb{N}$ và

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Sử dụng khai triển Taylor của hàm e^x ta chứng minh được

$$\mathbb{E}X = DX = \lambda.$$

2.2 Biến ngẫu nhiên trên không gian trạng thái tổng quát

2.2.1 Định nghĩa

Giả sử $(\Omega, \mathcal{A})$ là không gian đo đã cho và $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ là σ-đại số Borel trên $\mathbb{R}$ được xác định ở Ví dụ 1.4.

Định nghĩa 2.4. *Hàm thực $X : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là $\mathcal{A}$-đo được hay* biến ngẫu nhiên *nếu*

$$X^{-1}(B) := \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{A} \quad \text{với mọi } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Theo Định lí 1.5 ta có kết quả sau

Định lí 2.5. *Giả sử $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương*

1. *X là bnn.*
2. *$\{w : X(w) \le a\} \in \mathcal{A}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.*

Chứng minh. Khẳng định (1) $\Rightarrow$ (2) là hiển nhiên, ta chứng tỏ (2) $\Rightarrow$ (1). Gọi

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Ta có $\mathcal{C}$ là một σ-đại số (Tại sao?) và nó chứa tất cả các tập có dạng $(-\infty, a]$ với mọi $a \in \mathbb{R}$. Do đó theo Định lí 1.5, $\mathcal{C}$ chứa

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mà $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nên $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2.6. *Cho không gian đo* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Với mỗi tập* $B \subset \Omega$ *ta dễ dàng kiểm tra được* $\mathbb{I}_B$ *là biến ngẫu nhiên khi và chỉ khi* $B \in \mathcal{A}$. *Tổng quát hơn, nếu* $x_i \in \mathbb{R}$ *và* $A_i \in \mathcal{A}$ *với mọi* i *thuộc tập không quá đếm được* I *nào đó thì* $X(w) = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{I}_{A_i}(w)$ *cũng là một bnn. Ta gọi* X *là* biến ngẫu nhiên rời rạc. *Khi* I *chỉ gồm hữu hạn phần tử thì* X *được gọi là* biến ngẫu nhiên đơn giản.

Định nghĩa 2.7. *Hàm* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *được gọi là* hàm Borel *nếu* $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *với mọi* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Nhận xét 3. *Từ định nghĩa trên ta suy ra mọi hàm liên tục đều là hàm Borel. Do đó các hàm* $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto x/y$, $(x, y) \mapsto x \vee y$, $(x, y) \mapsto x \wedge y$ *cũng là các hàm Borel. Trong đó ta kí hiệu* $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$.

Định lí 2.8. *Giả sử* $X_1, \ldots, X_d$ *là các bnn cùng xác định trên không gian đo* $(\Omega, \mathcal{A})$ *và* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *là hàm Borel. Khi đó* $Y = \varphi(X_1, \ldots, X_d)$ *cũng là một bnn.*

Chứng minh. Đặt $X(w) = (X_1(w), \ldots, X_d(w))$ là hàm trên $(\Omega, \mathcal{A})$

và nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$. Với mọi $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ ta có

$$X^{-1}\Big(\prod_{i=1}^{d}(-\infty, a_i]\Big) = \bigcap_{i=1}^{d}\{w : X_i(w) \leq a_i\} \in \mathcal{A}.$$

Áp dụng Định lí 1.5 và lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.5 ta được $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Từ đó suy ra với mọi $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, do $B := \varphi^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nên

$$Y^{-1}(C) = X^{-1}(\varphi^{-1}(C)) \in \mathcal{A},$$

tức là Y là bnn. □

Từ định lí trên và Nhận xét ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.9. *Giả sử X và Y là hai bnn. Khi đó $X \pm Y, XY, X \wedge Y, X \vee Y, |X|, X^+ := X \vee 0, X^- = (-X) \vee 0$ và X/Y (nếu $Y \neq 0$) cũng là các bnn.*

Như vậy tập các bnn là đóng kín đối với các phép toán số học thông thường.

Định lí 2.10. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn. Khi đó các đại lượng $\sup_n X_n, \inf_n X_n, \limsup_n X_n, \liminf_n X_n$ cũng là các bnn nếu chúng là hữu hạn.*

Chứng minh. Ta có $\sup_n X_n$ là bnn vì với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$\{w : \sup_n X_n(w) \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{w : X_n(w) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

Các chứng minh còn lại dành cho bạn đọc. $\square$

Từ Định lí 2.10 ta suy ra rằng nếu dãy bnn X_n hội tụ tới đại lượng X, tức là $X_n(w) \to X(w)$ với mọi $w \in \Omega$, thì X cũng là một bnn.

2.2.2 Cấu trúc của biến ngẫu nhiên

Định lí 2.11. *Giả sử X là bnn xác định trên $(\Omega, \mathcal{A})$. Khi đó*

1. *tồn tại dãy bnn rời rạc hội tụ đều theo $w \in \Omega$ đến X;*
2. *nếu X là không âm thì tồn tại dãy bnn đơn giản Y_n sao cho $Y_n \uparrow X$.*

Chứng minh. Với mỗi $n \geq 1$, đặt $X_n(w) = \frac{k}{n}$ nếu $\frac{k}{n} \leq X(w) < \frac{k+1}{n}$ với $k \in \mathbb{Z}$ nào đó. Ta có X_n là bnn rời rạc và $|X_n(w) - X(w)| \leq \frac{1}{n}$ với mọi $w \in \Omega$. Do đó dãy (X_n) hội tụ đều theo w đến X.

Giả sử $X \geq 0$. Với mỗi $n \geq 1$, đặt $Y_n(w) = \frac{k}{2^n}$ nếu $\frac{k}{2^n} \leq X(w) < \frac{k+1}{2^n}$ với $k \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ nào đó và $Y_n(w) = 2^n$ nếu $X(w) \geq 2^n$. Khi đó (Y_n) là dãy biến ngẫu nhiên đơn giản và $Y_n \uparrow X$. $\square$

Định nghĩa 2.12. *Giả sử X là bnn trên $(\Omega, \mathcal{A})$. Ta gọi*

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

là σ-đại số sinh bởi bnn X.

Định lí 2.13. *Giả sử X là bnn trên $(\Omega, \mathcal{A})$ và Y là ánh xạ từ Ω vào $\mathbb{R}$. Khi đó Y là $\sigma(X)$-đo được khi và chỉ khi tồn tại hàm Borel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $Y = \varphi(X)$.*

Về mặt trực giác ta coi $\sigma(X)$ là lượng thông tin về phép thử quan sát được từ bnn X và bnn Y là $\sigma(X)$-đo được có nghĩa là từ thông tin quan sát được từ X, ta có thể suy ra được giá trị của Y.

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên. Ta chứng minh điều kiện cần. Trước tiên giả sử Y là bnn rời rạc nhận các giá trị là $y_1, y_2, \ldots$. Do Y là $\sigma(X)$-đo được nên các tập $A_n = \{w : Y(w) = y_n\} \in \sigma(X)$. Theo định nghĩa của $\sigma(X)$, tồn tại dãy $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sao cho $A_n = X^{-1}(B_n)$. Đặt

$$C_n = B_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ n \geq 1.$$

Ta có các tập C_n đôi một rời nhau và $X^{-1}(C_n) = A_n$. Xét

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} y_n \mathbb{I}_{C_n}(x),$$

ta có $Y = \varphi(X)$.

Trong trường hợp tổng quát, theo Định lí 2.11 tồn tại dãy hàm rời rạc Y_n là $\sigma(X)$-đo được và hội tụ đều đến Y. Vậy nên tồn tại các hàm Borel φ_n sao cho $Y_n = \varphi_n(X)$. Kí hiệu

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \exists \lim_n \varphi_n(x)\}.$$

Hiển nhiên $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ và $B \supset X(\Omega)$. Đặt $\varphi(x) = \lim_n \varphi_n(x)\mathbb{I}_B(x)$. Ta được $Y = \lim_n Y_n = \lim_n \varphi_n(X) = \varphi(X)$. □

2.3 Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên

2.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.14. *Giả sử X là bnn nhận giá trị trên $\mathbb{R}$. Hàm số*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X < x], \quad x \in \mathbb{R},$$

được gọi là hàm phân phối *của bnn X.*

Dễ thấy hàm $F = F_X$ thỏa mãn:

1. Nếu $x \le y$ thì $F(y) - F(x) = \mathbb{P}[x \le X < y]$;
2. F đơn điệu tăng;
3. F liên tục trái và có giới hạn phải tại mọi điểm;
4. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Ngược lại, với bất kì hàm số $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ thỏa mãn ba tính chất trên thì tồn tại một độ đo xác suất μ trên $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sao cho $F(x) = \mu((-\infty, x))$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ (Xem [3], mục 2.5.2).

Trong tiết trước ta đã làm quen với phân phối của các bnn rời rạc. Sau đây ta giới thiệu một loại bnn thường gặp khác là bnn có phân phối liên tục tuyệt đối.

Định nghĩa 2.15. *Bnn X được gọi là có phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ f_X nếu*

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X < a] = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Hàm mật độ $f = f_X$ thỏa mãn các tính chất sau đây.

1. $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
2. $\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b f(x)dx$ với mọi số thực $a < b$. Hơn nữa, với mọi tập Borel $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ta có

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A f(x)dx. \tag{2.1}$$

Từ tính chất thứ hai suy ra nếu bnn X có phân phối liên tục tuyệt đối thì $\mathbb{P}[X = a] = 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

2.3.2 Ví dụ

Sau đây ta liệt kê một số phân phối liên tục tuyệt đối thường gặp nhất.

Phân phối đều $U[a,b]$

Với mỗi cặp số thực $a < b$. Bnn X được gọi là có *phân phối đều* trên đoạn $[a,b]$, kí hiệu là $X \sim U[a,b]$, nếu X nhận giá trị thuộc đoạn $[a,b]$ và có hàm mật độ

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x).$$

Hàm phân phối của X là

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{nếu } a \le x \le b, \\ 1 & \text{nếu } x > b. \end{cases}$$

Phân phối mũ $Exp(\lambda)$

Giả sử $\lambda > 0$. Bnn X được gọi là có *phân phối mũ* với tham số λ, kí hiệu là $X \sim Exp(\lambda)$, nếu X nhận giá trị trên tập $(0,\infty)$ có hàm mật độ

$$f_X(x) = \lambda^{-1}e^{-x/\lambda}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Hàm phân phối của X là

$$F_X(x) = (1 - \lambda^{-1}e^{-x/\lambda})\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Bnn X được gọi là có phân phối chuẩn với tham số a, σ^2 $(\sigma > 0)$, kí hiệu là $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(0, 1)$ được gọi là *phân phối chuẩn tắc*.

Phân phối Gamma $\mathcal{G}(\alpha, p)$

Bnn X được gọi là có phân phối Gamma với tham số α, p $(\alpha, p > 0)$, kí hiệu là $X \sim \mathcal{G}(\alpha, p)$, nếu hàm mật độ của nó có dạng

$$f_X(x) = \frac{\alpha^p x^{p-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(p)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x),$$

trong đó $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Phân phối mũ là trường hợp đặc biệt của phân phối Gamma khi $p = 1$. Phân phối $\mathcal{G}(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$ được gọi là *phân phối khi bình phương* với n bậc tự do (viết gọi là $\chi^2(n)$).

2.4 Kì vọng của biến ngẫu nhiên

2.4.1 Xây dựng kì vọng

Trước hết ta xây dựng kì vọng của bnn đơn giản.

Định nghĩa 2.16. *Giả sử X là bnn đơn giản có biểu diễn*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{I}_{A_i} \tag{2.2}$$

với $a_i \in \mathbb{R}$ *và* $A_i \in \mathcal{A}$ *với mọi* $i = 1, \dots, n$. Kì vọng *của X (hay* tích phân *của X đối với độ đo* $\mathbb{P}$*) là*

$$\mathbb{E}X := \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{P}(A_i).$$

Kí hiệu tập các bnn đơn giản là $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_s(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dễ thấy định nghĩa trên không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn (2.2) Hơn nữa nếu các a_i là đôi một khác nhau thì $\mathbb{E}X := \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{P}[X = a_i]$ và định nghĩa này trùng với Định nghĩa 2.1 cho kì vọng của bnn xác định trên không gian xác suất rời rạc.

Giả sử X và Y là thuộc $\mathcal{L}_s$. Khi đó ta có thể biểu diễn cả X và Y ở dạng (2.2) với cùng một phân hoạch $\{A_i, 1 \leq i \leq n\}$ của Ω trong $\mathcal{A}$. Giả sử

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{I}_{A_i}, \text{ và } Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{I}_{A_i}.$$

Ta có với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X + \beta Y$ cũng thuộc $\mathcal{L}_s$ và có biểu diễn

$$\alpha X + \beta Y = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \mathbb{I}_{A_i}.$$

Vậy nên $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$, tức là toán tử kì vọng $\mathbb{E}$ có tính chất tuyến tính. Mặt khác, $\mathbb{E}$ là toán tử không âm vì nếu $X \leq Y$, tức là $a_i \leq b_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$ thì ta cũng có $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

Tiếp theo ta xây dựng kì vọng của bnn không âm. Với mỗi bnn không âm X ta đặt

$$\mathbb{E}X = \sup\{\mathbb{E}Y : Y \textit{ đơn giản và } 0 \leq Y \leq X\}. \tag{2.3}$$

Dễ thấy supremum trên luôn tồn tại và thuộc $[0, \infty]$. Do $\mathbb{E}$ là toán tử không âm trên $\mathcal{L}_s$ nên kì vọng theo Định nghĩa 2.3 của bnn X đơn giản chính bằng kì vọng của X theo Định nghĩa 2.16.

Lưu ý rằng $\mathbb{E}X \geq 0$ nhưng ta có thể có $\mathbb{E}X = +\infty$ mặc dù X không bao giờ nhận giá trị $+\infty$.

Tiếp theo, ta định nghĩa kì vọng cho bnn bất kì.

Định nghĩa 2.17. *1. Bnn X được gọi là* khả tích *nếu* $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. *Khi đó, kì vọng của X là*

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-). \tag{2.4}$$

Ta cũng kí hiệu $\mathbb{E}X = \int X(w) d\mathbb{P}(w) = \int X d\mathbb{P}$.

2. Nếu hai giá trị $\mathbb{E}(X^+)$ *và* $\mathbb{E}(X^-)$ *không đồng thời bằng* $+\infty$ *thì kì vọng của X vẫn được xác định bởi công thức (2.4) với lưu ý rằng* $+\infty + a = +\infty$ *và* $-\infty + a = -\infty$ *với mọi* $a \in \mathbb{R}$.

Khi $X \geq 0$ thì $X = X^+$ và $X^- = 0$ và do đó Định nghĩa 2.4 trùng với Định nghĩa 2.3 cho bnn không âm. Ta kí hiệu $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ là tập các bnn khả tích.

Bổ đề 2.18. *Giả sử X là bnn không âm và $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn đơn giản tăng dần tới X. Khi đó $\mathbb{E}X_n \uparrow \mathbb{E}X$.*

Chứng minh. Ta có $(\mathbb{E}X_n)_{n\geq 1}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi $\mathbb{E}X$ do Định nghĩa 2.3 nên $(\mathbb{E}X_n)_{n\geq 1}$ hội tụ tới $a \leq \mathbb{E}X$. Để chứng tỏ $a = \mathbb{E}X$ ta chỉ cần chỉ ra rằng với mọi bnn đơn giản Y thỏa mãn $0 \leq Y \leq X$ ta đều có $\mathbb{E}Y \leq a$.

Thật vậy, giả sử Y nhận m giá trị khác nhau $y_1, \ldots, y_m$. Đặt $A_k = \{w : Y(w) = y_k\}$. Với mỗi $\epsilon \in (0, 1]$, xét dãy bnn $Y_{n,\epsilon} = (1-\epsilon)Y\mathbb{I}_{\{(1-\epsilon)Y \leq X_n\}}$. Ta có $Y_{n,\epsilon}$ là bnn đơn giản, $Y_{n,\epsilon} \leq X_n$ nên

$$\mathbb{E}Y_{n,\epsilon} \leq \mathbb{E}X_n \leq a \text{ với mọi } n. \tag{2.5}$$

Lại do $Y \leq \lim_n X_n$ nên với mọi $w \in \Omega$, tồn tại $n = n(w)$ sao cho $(1-\epsilon)Y(w) \leq X_n(w)$, tức là $A_k \cap \{w : (1-\epsilon)Y(w) \leq X_n(w)\} \to A_k$ khi $n \to \infty$. Theo Định lí 1.10,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_{n,\epsilon} &= (1-\epsilon)\sum_{k=1}^{m} y_k \mathbb{P}\Big(A_k \cap [(1-\epsilon)Y \leq X_n]\Big) \\ &\to (1-\epsilon)\sum_{k=1}^{m} y_k \mathbb{P}(A_k) = (1-\epsilon)\mathbb{E}Y, \quad \text{khi } n \to \infty.\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.5) ta có $(1-\epsilon)\mathbb{E}Y \leq a$ với mọi $\epsilon \in (0,1]$, tức là $\mathbb{E}Y \leq a$. □

Định lí 2.19. *1. $\mathcal{L}^1$ là không gian véc tơ và kì vọng là kì vọng là toán tử tuyến tính trên $\mathcal{L}^1$, tức là với mọi $X, Y \in \mathcal{L}^1$ và $x, y \in \mathbb{R}$ ta có $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{L}^1$ và*

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y.$$

2. Nếu $0 \leq X \leq Y$ và $Y \in \mathcal{L}^1$ thì $X \in \mathcal{L}^1$ và $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

Chứng minh. Phần 2 suy ra trực tiếp từ Định nghĩa 2.3. Để chứng minh phần 1 trước hết ta có nhận xét rằng nếu X và Y là hai bnn không âm và $\alpha, \beta \geq 0$ thì theo Định lí 2.11 tồn tại hai dãy tăng không âm (X_n) và (Y_n) trong $\mathcal{L}_s$ lần lượt hội tụ đến X và Y. Khi đó $\alpha X_n + \beta Y_n$ cũng là các bnn đơn giản, không âm và hội tụ đến $\alpha X + \beta Y$. Áp dụng tính chất tuyến tính và không âm của toán tử kì vọng trên $\mathcal{L}_s$ và Bổ đề 2.18 ta được $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$.

Bây giờ ta chứng minh Định lí 2.19. Xét hai bnn $X, Y \in \mathcal{L}^1$ bất kì. Do $|\alpha X + \beta Y| \leq |\alpha||X| + |\beta||Y|$ nên $\alpha X + \beta Y \in \mathcal{L}^1$. Ta có nếu $\alpha > 0$ thì

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \mathbb{E}((\alpha X)^+) - \mathbb{E}((\alpha X)^-) = \mathbb{E}(\alpha(X^+)) - \mathbb{E}(\alpha(X^-)) = \alpha\mathbb{E}(X^+) - \alpha\mathbb{E}(X^-) =$$

Tương tự khi $\alpha < 0$ ta cũng có

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \mathbb{E}((\alpha X)^+) - \mathbb{E}((\alpha X)^-) = \mathbb{E}(-\alpha(X^-)) - \mathbb{E}(-\alpha(X^+)) = -\alpha\mathbb{E}(X^-) + \alpha\mathbb{E}(X$$

tức là

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha\mathbb{E}(X) \text{ với mọi } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Mặt khác, đặt $Z = X + Y$ ta có $Z^+ - Z^- = X + Y = X^+ + Y^+ - (X^- + Y^-)$, suy ra $Z^+ + X^- + Y^- = Z^- + X^+ + Y^+$. Do vậy $\mathbb{E}(Z^+) + \mathbb{E}(X^-) + \mathbb{E}(Y^-) = \mathbb{E}(Z^-) + \mathbb{E}(X^+) + \mathbb{E}(Y^+)$, suy ra

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(Z^+) - \mathbb{E}(Z^-) = \mathbb{E}(X^+) + \mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(X^-) - \mathbb{E}(Y^-) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y.$$

Kết hợp với (2.6) ta được

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \mathbb{E}(\alpha X) + \mathbb{E}(\beta Y) = \alpha\mathbb{E}X + \beta\mathbb{E}Y.$$

□

Một biến cố A được gọi là xảy ra *hầu chắc chắn* nếu $\mathbb{P}(A) = 1$. Do vậy ta nói hai bnn X và Y bằng nhau hầu chắc chắn nếu $\mathbb{P}[X = Y] = 1$.

Từ Định lí trên ta có hệ quả trực tiếp sau.

Hệ quả 2.20. *1. Nếu $Y \in \mathcal{L}^1$ và bnn X thỏa mãn $|X| \le Y$ thì $X \in \mathcal{L}^1$.*

2. Nếu $X \ge 0$ h.c.c và $\mathbb{E}(X) < \infty$ thì $X < \infty$ h.c.c.

3. *Nếu* $\mathbb{E}(|X|) = 0$ *thì* $X = 0$ *h.c.c.*

Chứng minh. 2) Đặt $A = \{w : X(w) = \infty\}$. Với mọi n ta có $X(w) \geq X(w)\mathbb{I}_A(w) \geq n\mathbb{I}_A(w)$ nên $\mathbb{E}(X) \geq n\mathbb{P}(A)$ với mọi n. Do đó $\mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $\mathbb{P}(A) = 0$.

3) Đặt $A_n = \{w : |X(w)| \geq 1/n\}$. Ta có $(A_n)_{n\geq 1}$ là dãy giảm và $\mathbb{P}(X \neq 0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Hơn nữa

$$\frac{1}{n}\mathbb{I}_{A_n}(w) \leq |X(w)|\mathbb{I}_{A_n}(w) \leq |X(w)|$$

nên $\mathbb{P}(A_n) \leq n\mathbb{E}|X| = 0$ với mọi n. Vậy $\mathbb{P}(A) = 0$ tức là $X = 0$ h.c.c. □

Định lí 2.21. *Nếu hai bnn khả tích* X *và* Y *bằng nhau hầu chắc chắn thì* $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$.

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp X và Y đều không âm. Đặt $A = \{w : X(w) \neq Y(w)\}$. Ta có $\mathbb{P}(A) = 0$. Hơn nữa,

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(Y\mathbb{I}_A + Y\mathbb{I}_{A^c}) = \mathbb{E}(Y\mathbb{I}_A) + \mathbb{E}(Y\mathbb{I}_{A^c}) = \mathbb{E}(Y\mathbb{I}_A) + \mathbb{E}(X\mathbb{I}_{A^c}).$$

Giả sử (Y_n) là dãy bnn đơn giản tăng dần đến Y. Khi đó $(Y_n\mathbb{I}_A)$ cũng là dãy bnn đơn giản tăng dần đến $(Y\mathbb{I}_A)$. Giả sử với mỗi $n \geq 1$, bnn Y_n bị chặn bởi N_n thì

$$0 \leq \mathbb{E}(Y_n\mathbb{I}_A) \leq \mathbb{E}(N_n\mathbb{I}_A) = N_n\mathbb{P}(A) = 0$$

với mọi n. Vậy nên $\mathbb{E}(Y\mathbb{I}_A) = 0$. Tương tự $\mathbb{E}(X\mathbb{I}_A) = 0$. Do đó $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X$.

Trong trường hợp tổng quát, từ $X = Y$ hcc ta dễ dàng suy ra $X^+ = Y^+$ và $X^- = Y^-$ hcc. Do đó ta cũng có $\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) = \mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(Y^-) = \mathbb{E}Y$.

□

Vì sự bằng nhau hcc giữa hai bnn là một quan hệ tương đương, ta có thể định nghĩa không gian L^1 là không gian thương của $\mathcal{L}^1$ với quan hệ tương đương đó. Từ Định lí 2.21 suy ra ta có thể xác định "kì vọng" của một phần tử của L^1 bởi kì vọng của một bnn bất kì trong lớp tương đương ứng với phần tử đó. Lại do phép cộng và phép nhân vô hướng của các bnn bảo toàn tính chất bằng nhau hcc nên L^1 là một không gian véc tơ. Từ nay về sau, nếu không gây nhầm lẫn ta sẽ đồng nhất mỗi bnn với lớp tương tương chứa nó và ta sẽ viết $X \in L^1$ thay cho $X \in \mathcal{L}^1$. Tương tự với mọi $p \in [0, \infty)$, ta kí hiệu $\mathcal{L}^p$ là tập hợp các bnn X thỏa mãn $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ và L^p là không gian thương của $\mathcal{L}^p$ với quan hệ tương đương bằng nhau hcc.

2.4.2 Định lí giới hạn

Định lí 2.22 (Định lí hội tụ đơn điệu). *Giả sử dãy bnn $(X_n)_{n\geq 1}$ là không âm và tăng hcc tới X, khi đó $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$ (kể cả khi $\mathbb{E}X = \infty$).*

Chứng minh. Với mỗi n gọi $(Y_{n,k})_{k\geq 1}$ là dãy bnn đơn giản tăng tới X_n và đặt $Z_k = \max_{n\leq k} Y_{n,k}$. Khi đó $(Z_k)_{k\geq 1}$ là dãy không giảm các bnn đơn giản không âm vậy nên tồn tại $Z = \lim_{k\to\infty} Z_k$. Lại có

$$Y_{n,k} \leq Z_k \leq X \quad \forall n \leq k$$

nên cho $k \to \infty$ ta được

$$X_n \leq Z \leq X \quad hcc.$$

Tiếp theo cho $n \to \infty$ ta được $Z = X$ hcc. Do kì vọng là toán tử dương, ta có

$$\mathbb{E}Y_{n,k} \leq \mathbb{E}Z_k \leq \mathbb{E}X_k \quad \forall n \leq k.$$

Cố định n và cho $k \to \infty$, theo Bổ đề 2.18 ta được

$$\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}Z \leq \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}X_k.$$

Lại cho $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}Z \leq \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}X_k.$$

Do biểu thức tận cùng bên trái và phải của công thức trên là bằng nhau, $X = Z$ hcc, ta được điều phải chứng minh. □

Định lí 2.23 (Bổ đề Fatou)**.** *Giả sử dãy bnn (X_n) thỏa mãn $X_n \geq Y$ hcc với mọi n và $Y \in L^1$ nào đó. Khi đó*

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n.$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh Định lí cho trường hợp $Y = 0$. Đặt $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$. Ta có (Y_n) là dãy bnn không giảm và

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \liminf_{n\to\infty} X_n.$$

Do $X_n \geq Y_n$, ta có $\mathbb{E}X_n \geq \mathbb{E}Y_n$. Kết hợp với định lí hội tụ đơn điệu cho dãy Y_n, ta được

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} Y_n) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n).$$

Trường hợp tổng quát suy ra từ việc áp dụng kết quả vừa chứng minh cho dãy bnn không âm $\hat{X}_n := X_n - Y$. □

Định lí 2.24 (Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue)**.** *Giả sử dãy bnn X_n hội tụ hcc đến bnn X và tồn tại $Y \in L^1$ sao cho $|X_n| \leq Y$ hcc. Khi đó $X, X_n \in L^1$ và*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0.$$

Chứng minh. Vì $|X| \leq Y$ nên $X \in L^1$. Đặt $Z_n = |X_n - X|$. Vì $Z_n \geq 0$ và $-Z_n \geq -2Y$, áp dụng Bổ đề Fatou cho Z_n và $-Z_n$, ta được

$$0 = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Z_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n = -\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(-Z_n) \leq -\mathbb{E}(\mathrm{li}$$

Vậy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_n = 0$ hay $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$. □

2.4.3 Một số bất đẳng thức

Định lí 2.25. *1. (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz) Nếu $X, Y \in L^2$ thì $XY \in L^1$ và*

$$|\mathbb{E}(XY)|^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2). \tag{2.7}$$

2. $L^2 \subset L^1$ và nếu $X \in L^2$ thì $(\mathbb{E}X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.

3. L^2 là một không gian véc tơ: nếu $X, Y \in L^2$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha X + \beta Y \in L^2$.

Chứng minh. Nếu $\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = 0$ thì $XY = 0$ h.c.c nên $|\mathbb{E}(XY)|^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = 0$.

Nếu $\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \neq 0$, áp dụng bất đẳng thức $2|ab| \leq a^2 + b^2$ với $a = X/\sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$ và $b = Y/\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ rồi lấy kì vọng hai vế, ta được

$$2\mathbb{E}\Big(\frac{XY}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}}\Big) \leq \mathbb{E}\Big(\frac{X^2}{\mathbb{E}(X^2)}\Big) + \mathbb{E}\Big(\frac{Y^2}{\mathbb{E}(Y^2)}\Big) = 2.$$

Từ đó ta được (2.7).

Áp dụng (2.7) cho $Y = 1$ ta được khẳng định thứ hai. Khẳng định thứ ba suy ra từ (2.7) và tính tuyến tính của kì vọng. □

Nếu $X \in L^2$, ta kí hiệu

$$DX = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2].$$

DX được gọi là *phương sai* của bnn X. Nó đặc trưng cho độ phân tán của X xung quanh giá trị trung bình $\mathbb{E}X$. Sử dụng tính tuyến tính của kì vọng, ta có $DX = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$.

Định lí 2.26. *1. (Bất đẳng thức Markov) Giả sử $X \in L^1$, khi đó với mọi $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

2. (Bất đẳng thức Chebyshev) Giả sử $X \in L^2$, khi đó với mọi $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{DX}{a^2}.$$

Chứng minh. 1) Do $a\mathbb{I}_{\{|X|\geq a\}}(w) \leq |X(w)|\mathbb{I}_{\{|X|\geq a\}}(w) \leq |X(w)|$ với mọi $w \in \Omega$. Lấy kì vọng hai vế ta được $a\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \mathbb{E}(|X|)$.

2) Áp dụng Bất đẳng thức Markov, ta có

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X|^2 \geq a^2) \leq \frac{DX}{a^2}.$$

□

2.4.4 Kì vọng của bnn có phân phối liên tục tuyệt đối

Định lí 2.27. *Giả sử bnn X có hàm mật độ f và $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm Borel. Khi đó nếu $\mathbb{E}(|h(X)|) < \infty$ hoặc h là không âm thì*

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)f(x)dx.$$

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp $h \geq 0$. Khi đó tồn tại dãy các hàm Borel đơn giản, không âm (h_n) tăng dần tới h. Giả sử $h_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^n \mathbb{I}_{A_i^n}$ với $a_i^n \in \mathbb{R}^+$ và $A_i^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ với mọi i. Theo định lí hội tụ đơn điệu

$$\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(\lim_n h_n(X)) = \lim_n \mathbb{E}(h_n(X)) = \lim_n \sum_{i=1}^{k_n} h_n(a_i^n)\mathbb{P}[X \in A_i^n].$$

Áp dụng tính chất (2.1) và định lí hội tụ đơn điệu, ta được

$$\mathbb{E}(h(X)) = \lim_n \sum_{i=1}^{k_n} h_n(a_i^n) \int_{A_i^n} f(x)dx = \lim_n \int f(x)h_n(x)dx = \int f(x)h(x)dx.$$

Vậy khi h không âm ta luôn có $\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)f(x)dx$.

Trong trường hợp tổng quát, áp dụng kết quả trên cho h^+ và h^- ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2.28. *Giả sử bnn $X \sim Exp(1)$. Khi đó áp dụng Định lí 2.27 cho $h(x) = x$ và $h(x) = x^2$ ta được*

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty xe^{-x}dx = 1,$$

và

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2.$$

2.5 Phần tử ngẫu nhiên

2.5.1 Định nghĩa

Tổng quát hóa khái niệm bnn ta có khái niệm phần tử ngẫu nhiên như sau.

Định nghĩa 2.29. *Giả sử* $(E, \mathcal{E})$ *là một không gian đo. Ánh xạ* $X : \Omega \to E$ *được gọi là* $\mathcal{A}/\mathcal{E}$-đo được *hay là một* phần tử ngẫu nhiên *nếu* $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *với mọi* $B \in \mathcal{E}$. *Hàm tập*

$$\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{E},$$

được gọi là phân phối xác suất *của* X *trên* $(E, \mathcal{E})$.

Nếu $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *thì phần tử ngẫu nhiên* X *còn được gọi là* véc tơ ngẫu nhiên.

Trong $\mathbb{R}^d$ ta có thể đưa vào quan hệ thứ tự bộ phận như sau. Với $x = (x_1, \dots, x_d)$ và $y = (y_1, \dots, y_d)$, ta viết $x < y$ nếu $x_i < y_i$ với mọi $i = 1, \dots, d$. Giả sử $X = (X_1, \dots, X_d)$ là véc tơ ngẫu nhiên d-chiều xác định trên $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Hàm số

$$F(x) = \mathbb{P}[X < x] = \mathbb{P}[X_1 < x_1, \dots, X_d < x_d], \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

được gọi là *hàm phân phối* của véc tơ ngẫu nhiên X. Dễ dàng kiểm tra được F có các tính chất sau:

1. $0 \le F(x) \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^d$.

2. $\lim_{x_k \to -\infty} F(x) = 0$ với mọi $k = 1, \dots, d$.

3. $\lim_{x_1 \to +\infty, \dots, x_d \to +\infty} F(x) = 1$.

4. Hàm F liên tục trái.

Véc tơ ngẫu nhiên X được gọi là có *phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ nếu

$$F(x) = \int_{u<x} f(u)du, \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^d.$$

Từ định nghĩa này ta có ngay

$$\mathbb{P}[X \in B] = \int_B f(x)dx, \quad \text{với mọi } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Đặc biệt, ta có

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_1] = \mathbb{P}[X \in B_1 \times \mathbb{R}^{d-1}] = \int_{B_1} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1, \dots, x_d) dx_2 \dots dx_d \Big) dx_1 \text{ với}$$

Do đó nếu $X = (X_1, \dots, X_d)$ là véc tơ ngẫu nhiên có phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ f thì bnn X_1 cũng có phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ là

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_2 \dots dx_d, \text{ với mọi } x_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Tương tự như Định lí 2.27, ta có kết quả sau.

Định lí 2.30. *Giả sử* $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *là véc tơ ngẫu nhiên có phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ* f *và* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *là hàm đo được. Khi đó*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) dx$$

nếu φ *không âm hoặc* $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| f(x) dx < \infty$.

2.5.2 Ví dụ

Phân phối chuẩn

Giả sử $a = (a_1, \ldots, a_d)$ là véc tơ d-chiều và $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^d$ là ma trận vuông cấp d. Giả sử M đối xứng, xác định dương và kí hiệu $A = M^{-1}$. Ta nói véc tơ ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_d)$ có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(a, M)$ nếu mật độ của X có dạng

$$p(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(x-a)A(x-a)^* \Big\},$$

trong đó $(x-a)A(x-a)^* = \sum_i \sum_j a_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)$.

Phân phối đa thức

Véc tơ ngẫu nhiên d-chiều X được gọi là có phân phối đa thức với tham số $n, p_1, \ldots, p_d$, kí hiệu là $X \sim MUT(n; p_1, \ldots, p_d)$, với

$n \in \mathbb{N}^*$ và $p_1, \ldots, p_d \geq 0$ nếu

$$\mathbb{P}[X_1 = k_1, \ldots, X_d = k_d] = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_{d+1}!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{d+1}^{k_{d+1}},$$

trong đó $p_{d+1} = 1 - (p_1 + \ldots + p_d)$, $0 \leq k_i \leq n$ và $k_{d+1} = n - (k_1 + \ldots + k_d) \geq 0$.

2.5.3 Phân phối của hàm của véc tơ ngẫu nhiên

Định lí sau là hệ quả trực tiếp của Định lí 2.30 và công thức đổi biến số Jacobi trong giải tích.

Định lí 2.31. *Giả sử véc tơ ngẫu nhiên $X = (X_1, \ldots, X_d)$ có mật độ f_X. Giả sử $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đơn ánh khả vi liên tục với ma trận Jacobi*

$$J_g(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\ldots,d}$$

không suy biến với mọi $x \in \mathbb{R}^d$. Khi đó véc tơ ngẫu nhiên $Y = g(X)$ có mật độ

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\det J_{g^{-1}}(y)| & \text{nếu } y \in g(\mathbb{R}^d) \\ 0 & \text{nếu } y \notin g(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

2.6 Biến ngẫu nhiên độc lập

Định nghĩa 2.32. 1. *Các σ-đại số con $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ của $\mathcal{A}$ được gọi là* độc lập *nếu với mọi tập con hữu hạn J của I và với mọi $A_i \in \mathcal{A}_i$,* *ta có*

$$\mathbb{P}(\cap_{i\in J}A_i) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i).$$

2. *Các bnn* $(X_i)_{i\in I}$ *nhận giá trị trong* $(E_i, \mathcal{E}_i)$ *được gọi là* độc lập *nếu các σ-đại số* $(X_i^{-1}(\mathcal{E}_i))_{i\in I}$ *là độc lập.*

Một họ các tập con $\mathcal{C}$ của Ω được gọi là một π-hệ nếu nó đóng kín đối với phép toán giao, tức là $A \cap B \in \mathcal{C}$ với mọi $A, B \in \mathcal{C}$. Họ các tập con $\mathcal{D}$ của Ω được gọi là một λ-hệ nếu

- $\mathcal{D}$ đóng đối với phép lấy giới hạn tăng, tức là với mọi dãy $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ thuộc $\mathcal{D}$, ta có $\cup_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathcal{D}$;
- $\mathcal{D}$ đóng đối với phép lấy hiệu thực sự, tức là với mọi $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$ thì $B\backslash A \in \mathcal{D}$.

Bổ đề 2.33 (Định lí về lớp đơn điệu)**.** *Giả sử* $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *là hai họ các tập con của* Ω*, trong đo* $\mathcal{C}$ *là một* π*-hệ,* $\Omega \in \mathcal{C}$ *và* $\mathcal{D}$ *là một* λ*-hệ chứa* $\mathcal{C}$*. Khi đó* $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$*.*

Bổ đề 2.34. *Giả sử* $\mathcal{G}$ *và* $\mathcal{F}$ *là hai σ-đại số con của* $\mathcal{A}$ *và* $\mathcal{G}_1$ *và* $\mathcal{F}_1$ *là hai* π*-hệ thỏa mãn* $\sigma(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}$ *và* $\sigma(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}$*. Khi đó* $\mathcal{G}$ *độc lập với* $\mathcal{F}$ *khi và chỉ khi* $\mathcal{F}_1$ *và* $\mathcal{G}$ *độc lập, tức là*

$$\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G), \quad F \in \mathcal{F}_1,\ G \in \mathcal{G}_1.$$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{F}_1$ và $\mathcal{G}_1$ là độc lập. Cố định $F \in \mathcal{F}_1$ và xét

$$\sigma_F = \{G \in \mathcal{G} : \mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)\}.$$

Dễ dàng kiểm tra được σ_F là một λ-hệ chứa π-hệ $\mathcal{G}_1$. Áp dụng định lí về lớp đơn điệu ta được $\sigma_F = \mathcal{G}$, tức là

$$\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G), \quad F \in \mathcal{F}_1,\ G \in \mathcal{G}.$$

Tiếp theo với mỗi $G \in \mathcal{G}$ lại xét

$$\sigma_G = \{F \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)\}.$$

Ta cũng có σ_G là λ-hệ chứa π-hệ $\mathcal{F}_1$ nên $\sigma_G = \mathcal{F}$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Định lí 2.35. *Giả sử X và Y là hai bnn bất kì. Các khẳng định sau là tương đương.*

(i) *X độc lập với Y;*

(ii) *$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;*

(iii) *$f(X)$ và $g(Y)$ là độc lập với mọi hàm Borel $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;*

(iv) *$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$ với mọi hàm Borel $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cùng bị chặn hoặc cùng không âm.*

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$: Giả sử X độc lập với Y, khi đó hai biến cố $\{w : X(w) < x\}$ và $\{w : Y(w) < y\}$ cũng là độc lập với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây suy ra (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Do tập các biến cố $\{w : X(w) < x\},\ x \in \mathbb{R}$, là một π-hệ sinh ra $\sigma(X)$ và $\{w : X(w) < y\},\ y \in \mathbb{R}$, là một π-hệ sinh ra $\sigma(Y)$ nên áp dụng Bổ đề 2.34 ta có X độc lập với Y.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Với mọi $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ta có $f^{-1}(A), g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nên

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(f(X) \in A, g(Y) \in B) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A), Y \in g^{-1}(B))\\ &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A))\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B)) = \mathbb{P}(f(X) \in A)\mathbb{P}(g(Y) \in B).\end{aligned}$$

Vậy nên $f(X)$ độc lập với $g(Y)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Ta chỉ cần chọn $f(x) = g(x) = x$.

$(i) \Rightarrow (iv)$: Do (i) tương đương với (iii) ta chỉ cần chứng tỏ

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ với mọi bnn khả tích hoặc không âm X và Y.

Trước hết ta giả sử X và Y không âm. Theo Định lí 2.11 tồn tại dãy bnn đơn giản $X_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i \mathbb{I}_{A_i}$ tăng đến X và dãy bnn đơn giản $Y_n = \sum_{j=1}^{l_n} b_j \mathbb{I}_{B_j}$ tăng đến Y với $A_i \in \sigma(X)$ và $B_i \in \sigma(Y)$. Áp dụng định lí hội tụ đơn điệu, ta có

$$\mathbb{E}(XY) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_nY_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{l_n} a_ib_j\mathbb{P}(A_iB_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{l_n} a_ib_j\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}($$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k_n} a_i\mathbb{P}(A_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{l_n} b_j\mathbb{P}(B_j)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Trong trường hợp tổng quát, ta viết $X = X^+ - X^-$ và $Y = Y^+ - Y^-$. Lại do (*iii*), ta có $X^\pm$ độc lập với $Y^\pm$, do đó

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^+Y^+) + \mathbb{E}(X^-Y^-) - \mathbb{E}(X^+Y^-) - \mathbb{E}(X^-Y^+)$$

$$= \mathbb{E}(X^+)\mathbb{E}(Y^+) + \mathbb{E}(X^-)\mathbb{E}(Y^-) - \mathbb{E}(X^+)\mathbb{E}(Y^-) - \mathbb{E}(X^-)\mathbb{E}(Y^+) = \mathbb{E}(X)$$

(*iv*) $\Rightarrow$ (*i*): Chọn $f = \mathbb{I}_{(-\infty,x)}$ và $g = \mathbb{I}_{(-\infty,y)}$.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*v*) là hiển nhiên. □

Hệ quả 2.36. *Giả sử (X, Y) là véc tơ ngẫu nhiên có phân phối liên tục tuyệt đối. Khi đó X và Y là độc lập khi và chỉ khi*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Ví dụ 2.37. *Giả sử X và Y là hai bnn độc lập có phân phối Poisson với tham số lần lượt là λ và μ ($\lambda, \mu > 0$). Với mọi số tự nhiên n,*

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\frac{e^{-mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\lambda^k\mu^{n-k} = \frac{e^{-\lambda-\mu}(\lambda+\mu)^n}{n!}.$$

Vây nên $X + Y$ có phân phối Poisson với tham số $\lambda + \mu$.

Ví dụ 2.38. *a) Giả sử X và Y là hai bnn độc lập với cùng phân phối chuẩn $N(0,1)$. Khi đó $U = X + Y$ và $V = X - Y$ cũng là hai bnn độc lập với cùng phân phối chuẩn $N(0,2)$. Thật vậy, đặt $g(x,y) = (x+y, x-y)$ ta có $g^{-1}(u,v) = ((u+v)/2, (u-v)/2)$ và*

$$J_{g^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng Định lí 2.31 ta được

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\Big|\det J_{g^{-1}}(u,v)\Big|.$$

Áp dụng Hệ quả 2.36, ta được

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2} f_X\Big(\frac{u+v}{2}\Big) f_Y\Big(\frac{u-v}{2}\Big) = \frac{1}{2}\frac{e^{-(u+v)^2/8}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-(u-v)^2/8}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{4\pi}e^{-(u^2+v^2)/4}.$$

Áp dụng công thức (2.8) ta có mật độ của U là

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)dv = \frac{e^{-u^2/4}}{\sqrt{4\pi}}.$$

Tương tự mật độ của V là

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)du = \frac{e^{-v^2/4}}{\sqrt{4\pi}}.$$

Do đó U và V cùng có phân phối chuẩn $N(0,2)$ và hơn nữa

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) f_V(v), \quad \text{với mọi } u, v \in \mathbb{R},$$

vậy nên theo Hệ quả 2.36 X độc lập với Y.

b) Tiếp theo, xét bnn

$$Z = \begin{cases} X/Y & \text{nếu } Y \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } Y = 0. \end{cases}$$

Để tìm phân phối của Z, ta đặt $g(x, y) = (x/y, y)$, ta có $g^{-1}(z, t) = (zt, t)$ và

$$J_{g^{-1}}(z, t) = \begin{pmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng Định lí 2.31 và Hệ quả 2.36 ta được

$$f_{(Z,Y)}(z, t) = f_{(X,Y)}(zt, t)|t| = |t|\frac{e^{t^2(z^2+1)/2}}{2\pi}.$$

Do đó, hàm mật độ của Z là

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |t|\frac{e^{t^2(z^2+1)/2}}{2\pi}dt = \frac{1}{\pi(1+z^2)}.$$

Bnn Z được gọi là có phân phối Cauchy.

c) Xét bnn $\chi^2 = X^2 + Y^2$. Với mọi tập Borel $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$, áp dụng Định lí 2.30 ta có

$$\mathbb{P}(\chi^2 \in A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\chi^2)) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_A(x^2 + y^2) f_{(X,Y)}(x, y)dxdy.$$

Sử dụng công thức tọa độ cực $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ ta được

$$\mathbb{P}(\chi^2 \in A) = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \mathbb{I}_A(r^2) r\frac{e^{-r^2/2}}{2\pi}d\varphi = \int_0^\infty \mathbb{I}_A(r^2) r e^{-r^2/2}dr = \int_A \frac{e^{-z/2}}{2}dz$$

trong đó đẳng thức cuối cùng có được từ phép đổi biến $z = r^2$. *Vậy* χ^2 *có phân phối mũ với hàm mật độ là*

$$f_{\chi^2}(z) = \begin{cases} \frac{e^{-z/2}}{2} & \text{nếu } z > 0 \\ 0 & \text{nếu } z \leq 0. \end{cases}$$

2.7 Hệ số tương quan

Định nghĩa 2.39. Hiệp phương sai *của hai bnn* $X, Y \in L^2$ *là*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)].$$

Hệ số tương quan *của hai bnn* $X, Y \in L^2$ *là*

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DXDY}}.$$

Sử dụng tính tuyến tính của kì vọng, ta có

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có $|cov(X, Y)| \leq \sqrt{DXDY}$, nên suy ra

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

Hệ số tương quan $\rho(X, Y)$ đặc trưng cho độ phụ thuộc (tuyến tính) của hai bnn X và Y. Nếu $\rho(X, Y) \approx 1$ thì X và Y gần như tỉ lệ thuận với nhau, trong khi nếu $\rho(X,Y) \approx -1$ thì X và Y gần như tỉ lệ nghịch. Trong trường hợp $\rho(X,Y) = 0$ ta nói X và Y là *không tương quan*. Theo Định lí 2.35 ta có nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì $cov(X,Y) = 0$ nên chúng không tương quan. Điều ngược lại chưa chắc đã đúng.

Ví dụ 2.40. *Giả sử X và Y là hai bnn độc lập có cùng phân phối chuẩn $N(0,1)$. Đặt $Z = XY$ và $T = X - Y$. Ta có*

$$cov(Z,T) = \mathbb{E}(XY(X-Y)) - \mathbb{E}(XY)\mathbb{E}(X-Y) = 0,$$

và

$$cov(Z,T^2) = \mathbb{E}(XY(X-Y)^2) - \mathbb{E}(XY)\mathbb{E}((X-Y)^2) = -2,$$

vì $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{E}(X^3Y) = \mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{E}(XY^3) = \mathbb{E}X\mathbb{E}(Y^3) = 0$ *và* $\mathbb{E}(X^2Y^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = 1$. *Vậy Z và T là hai bnn không tương quan nhưng không độc lập.*

Mệnh đề 2.41. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là một dãy các bnn đôi một không tương quan. Khi đó*

$$D(X_1 + \ldots + X_n) = D(X_1) + \ldots + D(X_n).$$

Chứng minh. Ta có

$$
\begin{aligned}
D(X_1 + \ldots + X_n) &= \mathbb{E}\Big[\Big((X_1 - \mathbb{E}X_1) + \ldots (X_n - \mathbb{E}X_n)\Big)^2\Big] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)^2] + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)^2] = \sum_{i=1}^n D(X_i),
\end{aligned}
$$

vì $\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)] = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0$ với mọi $1 \le i < j \le n$. □

Bài tập

Kì vọng của bnn

2.1. *Giả sử $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm tăng là không âm. CMR*

$$\mathbb{P}(|X| \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(a)} \quad \text{với mọi } a > 0.$$

2.2. *Một cửa hàng bán sữa tươi tại một công viên. Mỗi ngày cửa hàng nhập về c đơn vị sữa tươi với giá là $b > 0$ đồng một đơn vị. Trong ngày cửa hàng bán sữa đó với giá $s > b$ đồng mỗi đơn vị. Cuối ngày cửa hàng đổ bỏ toàn bộ lượng sữa chưa bán được. Quản lí cửa hàng biết rằng lượng tiêu thụ sữa mỗi ngày là một đại lượng ngẫu nhiên không âm khả tích D có phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ f nào đó. Gọi N là lợi nhuận kinh doanh mỗi ngày của cửa* *hàng. Tìm giá trị c của lượng sữa cần nhập mỗi ngày để N có giá trị trung bình lớn nhất*

Giải 2.2: Ta có $N = (D \wedge c)s - bc$ nên

$$\mathbb{E}N = s\int_0^\infty (x \wedge c)f(x)dx - bc =: N(c).$$

Vì $N''(c) = -sf(c) < 0,\ N'(0) = s - b > 0$ và $N'(+\infty) = -b < 0$ nên phương trình $N'(c) = s\int_c^\infty f(x)dx - b = 0$ có nghiệm duy nhất $c^* = h^{-1}(b/s) \in (0,\infty)$ với $h(x) = \int_x^\infty f(x)dx$ và $N(c)$ đạt giá trị lớn nhất khi $c = c^*$.

2.3. *Cho bnn X. Giả sử ánh xạ* $x \mapsto F(x) = \mathbb{P}[X \le x]$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$. *CMR bnn* $Y = F(X)$ *có phân phối đều trên đoạn* $[0,1]$.

Chương 3

Sự hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên

3.1 Các dạng hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 3.1. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn xác định trên không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Dãy* (X_n) *được gọi là*

- hội tụ hầu chắc chắn *đến bnn X, kí hiệu là* $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ *hay* $\lim_n X_n = X$ *h.c.c, nếu*

$$\mathbb{P}\Big(w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\Big) = 1;$$

- hội tụ theo xác suất *đến bnn X, kí hiệu là* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$*, nếu với mọi* $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0;$$

- hội tụ theo trung bình bậc p $(p > 0)$ *đến bnn X, kí hiệu là* $X_n \xrightarrow{L^p} X$ *nếu* $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ *với mọi n,* $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

Với hai bnn X và Y bất kì, ta kí hiệu

$$d_{\mathbb{P}}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[\frac{|X-Y|}{|X-Y|+1}\Big].$$

Mệnh đề sau đặc trưng sự hội tụ theo xác suất thông qua $d_{\mathbb{P}}$.[1]

Mệnh đề 3.2. *Dãy bnn $(X_n)_{n\geq 1}$ hội tụ theo xác suất đến bnn X khi và chỉ khi*

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{P}}(X_n, X) = 0. \tag{3.1}$$

Chứng minh. $\Rightarrow$) Giả sử $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Với mọi $\epsilon > 0$ và $w \in \Omega$, do tính đồng biến của hàm $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ trên đoạn $[0,\infty)$, ta có

$$\frac{|X_n(w)-X(w)|}{|X_n(w)-X(w)|+1} \leq \frac{\epsilon}{\epsilon+1}\mathbb{I}_{\{|X_n-X|\leq\epsilon\}}(w) + \mathbb{I}_{\{|X_n-X|<\epsilon\}}(w).$$

Lấy kì vọng hai vế ta được

$$d_{\mathbb{P}}(X_n,X) \leq \frac{\epsilon}{\epsilon+1}\mathbb{P}(|X_n-X|\leq\epsilon) + \mathbb{P}(|X_n-X|>\epsilon).$$

Do đó

$$\limsup_{n\to\infty} d_{\mathbb{P}}(X_n,X) \leq \epsilon + \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\epsilon) = \epsilon \text{ với mọi } \epsilon > 0.$$

Từ đây suy ra (3.1).

$\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử điều kiện (3.1) được thỏa mãn, khi đó, với mọi $\epsilon > 0$, theo bất đẳng thức Markov, ta có

$$\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\epsilon) = \mathbb{P}\Big(\frac{|X_n-X|}{|X_n-X|+1} \geq \frac{\epsilon}{\epsilon+1}\Big) \leq \frac{\epsilon+1}{\epsilon}\mathbb{E}\Big[\frac{|X_n-X|}{|X_n-X|+1}\Big] \to 0 \text{ khi}$$

[1] $d_{\mathbb{P}}$ là một metric trên không gian L^0.

□

Mệnh đề sau khẳng định hội tụ theo xác suất yếu hơn hội tụ hầu chắc chắn và hội tụ theo trung bình.

Mệnh đề 3.3. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn.*

1. *Nếu* $X_n \xrightarrow{L^p} X$ *thì* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *với mọi* $p > 0$.

2. *Nếu* $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ *thì* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Chứng minh. 1) Giả sử $X_n \xrightarrow{L^p} X$. Với mọi $\epsilon > 0$ ta có

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X|^p \geq \epsilon^p) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p}{\epsilon^p} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

2) Giả sử $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$. Khi đó $\frac{|X_n - X|}{|X_n - X|+1} \xrightarrow{h.c.c} 0$ và theo định lí hội tụ bị chặn Lebesgue, $d_{\mathbb{P}}(X_n, X) \to 0$. Áp dụng Mệnh đề 3.2 ta được $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. □

Ví dụ 3.4. *Xét không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *với* $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ *và* $\mathbb{P}$ *là độ đo Lebesgue trên* Ω. *Với mỗi* $\alpha > 0$ *và* $1 \leq k \leq n$, *ta đặt*

$$X_{k,n} = n^\alpha \mathbb{I}_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}.$$

Khi đó dãy bnn

$$X_{1,1},\ X_{1,2},\ X_{2,2},\ X_{1,3},\ X_{2,3},\ X_{3,3}, \ldots$$

hội tụ theo xác suất đến 0 *nhưng* $\limsup X_{k,n} = \infty$. *Hơn nữa, với mỗi* $p > 0$, $\mathbb{E}(|X_{k,n}|^p) = n^{p\alpha-1}$ *nên* $X_{k,n} \xrightarrow{L^p} 0$ *khi và chỉ khi* $\alpha \in (0, 1/p)$.

Mặt khác, xét dãy

$$Y_n = 2^n \mathbb{I}_{(0,\frac{1}{n}]}, \quad n \geq 1.$$

Rõ ràng $Y_n \xrightarrow{h.c.c} 0$ *nhưng với mọi* $p > 0$, $\mathbb{E}(|Y_n|^p) = \frac{2^{np}}{n} \to \infty$ *khi* $n \to \infty$.

Một dãy bnn hội tụ theo xác suất thì chưa chắc đã hội tụ hầu chắc chắn. Tuy nhiên ta có khẳng định sau.

Mệnh đề 3.5. *1. Giả sử* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. *Khi đó tồn tại một dãy con* $(n_k)_{k\geq 1}$ *của dãy số tự nhiên sao cho* $X_{n_k} \xrightarrow{h.c.c} X$.

2. Ngược lại, giả sử mọi dãy con $(n_k)_{k\geq 1}$ *của dãy số tự nhiên đều chứa một dãy con khác* $(m_k)_{k\geq 1}$ *sao cho* $X_{m_k} \xrightarrow{h.c.c} X$ *thì* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Chứng minh. 1) Giả sử $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, khi đó $d_{\mathbb{P}}(X_n, X) \to 0$. Chọn dãy n_k tăng sao cho $d_{\mathbb{P}}(X_{n_k}, X) < 2^{-k}$. Áp dụng Định lí hội tụ đơn điệu 2.22 ta có

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_{n_k} - X|}{|X_{n_k} - X| + 1}\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\mathbb{P}}(X_{n_k}, X) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Vậy nên $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_{n_k}-X|}{|X_{n_k}-X|+1} < \infty$ h.c.c. Suy ra $\frac{|X_{n_k}-X|}{|X_{n_k}-X|+1} \xrightarrow{h.c.c} 0$. Điều này cũng có nghĩa là $X_{n_k} \xrightarrow{h.c.c} X$.

2) Ngược lại, giả sử mọi dãy con của dãy $(X_n)_{n\geq 1}$ đều chứa một dãy con khác hội tụ hầu chắc chắn đến X. Nếu $X_n \overset{\mathbb{P}}{\nrightarrow} X$ thì tồn tại $\epsilon > 0$ và dãy con $(n_k)_{k\geq 1}$ của dãy số tự nhiên sao cho $d_{\mathbb{P}}(X_{n_k}, X) > \epsilon$. Mặt khác, theo giả thiết tồn tại dãy con $(m_k)_{k\geq 1}$ của dãy $(n_k)_{k\geq 1}$ sao cho $X_{m_k} \overset{h.c.c}{\to} X$. Theo định lí hội tụ bị chặn, $\lim_{k\to\infty} d_{\mathbb{P}}(X_{m_k}, X) = 0$. Điều này mâu thuẫn với $d_{\mathbb{P}}(X_{m_k}, X) > \epsilon$ với mọi k. Do đó $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. □

Mệnh đề 3.6. *Giả sử $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục. Khi đó*

1. *nếu $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ và $Y_n \xrightarrow{h.c.c} Y$ thì $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{h.c.c} f(X, Y)$;*

2. *nếu $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ và $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ thì $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X, Y)$.*

Chứng minh. 1) Kí hiệu $A = \{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\} \cap \{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} Y_n(w) = Y(w)\}$. Ta có $\mathbb{P}(A) = 1$ và với mọi $w \in A$, do f liên tục nên $\lim_{n\to\infty} f(X_n(w), Y_n(w)) = f(X(w), Y(w))$. Vậy $f(X_n) \xrightarrow{h.c.c} f(X)$.

Khẳng định 2) suy ra từ 1) và phần hai của Mệnh đề 3.5. □

3.2 Luật số lớn

Trong tiết này ta sẽ giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ và kí hiệu $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

3.2.1 Luật yếu số lớn

Định lí 3.7. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(S_n)}{n^2} = 0.$$

Khi đó

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \textit{ khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Với mọi $\epsilon > 0$, áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n}\Big| \geq \epsilon\Big) \leq \frac{D(S_n)}{n^2\epsilon^2} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Sử dụng Mệnh đề 2.41, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 3.8. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy các bnn đôi một không tương quan và thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(X_1) + \ldots + D(X_n)}{n^2} = 0.$$

Khi đó

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \textit{ khi } n \to \infty.$$

3.2.2 Luật mạnh số lớn

Trước hết ta phát biểu và chứng minh một trường hợp đơn giản của luật mạnh số lớn.

Định lí 3.9. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy các bnn đôi một không tương quan và* $\sup_n D(X_n^2) \leq \sigma^2 < \infty$. *Khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} = 0 \quad \textit{h.c.c và trong } L^2.$$

Chứng minh. Trước hết ta giả sử $\mathbb{E}(X_n) = 0$. Đặt $Y_n = S_n/n$. Ta có $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ và theo Mệnh đề 2.41 ta có

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \leq \frac{\sigma^2}{n}.$$

Vậy $Y_n \xrightarrow{L^2} 0$. Hơn nữa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_{n^2}^2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n^2} < \infty.$$

Áp dụng Định lí hội tụ đơn điệu 2.22, ta có

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} Y_{n^2}^2\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_{n^2}^2) < \infty,$$

vậy nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} Y_{n^2}^2 < \infty$ hầu chắc chắn. Từ đây suy ra

$$Y_{n^2} \xrightarrow{h.c.c} 0. \tag{3.2}$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $p(n)$ là phần nguyên của $\sqrt{n}$. Khi đó, từ

$$Y_n - \frac{p(n)^2}{n} Y_{p(n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=p(n)^2+1}^{n} X_j,$$

ta có

$$\mathbb{E}\Big[\Big(Y_n - \frac{p(n)^2}{n} Y_{p(n)^2}\Big)^2\Big] \le \frac{n - p(n)^2}{n^2}\sigma^2 \le \frac{2p(n)+1}{n^2}\sigma^2 \le \frac{2\sqrt{n}+1}{n^2}\sigma^2 \le \frac{3}{n^{3/2}}\sigma^2,$$

vì $n \le (p(n)+1)^2$ và $p(n) \le \sqrt{n}$. Lập luận tương tự như trên ta có từ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(Y_n - \frac{p(n)^2}{n} Y_{p(n)^2}\Big)^2\Big] \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{3/2}}\sigma^2 < \infty,$$

suy ra

$$Y_n - \frac{p(n)^2}{n} Y_{p(n)^2} \xrightarrow{h.c.c} 0.$$

Điều này kết hợp với (3.2) và nhận xét $\frac{p(n)^2}{n} \to 1$ kéo theo $Y_n \xrightarrow{h.c.c} 0$.

Nếu $\mathbb{E}(X_n) \neq 0$, ta đặt $Z_n = X_n - \mathbb{E}(X_n)$. Khi đó $(Z_n)_{n\ge1}$ là dãy các bnn đôi một không tương quan, có kì vọng bằng không và phương sai bị chặn đều. Do đó

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n} \xrightarrow{h.c.c} 0.$$

□

Sau đây ta phát biểu (không chứng minh) hai dạng khá tổng quát của luật mạnh số lớn.

Định lí 3.10. *Giả sử $(X_n)_{n\ge1}$ là dãy bnn độc lập, $(b_n)_{n\ge1}$ là dãy số* *dương, $b_n \uparrow \infty$. Khi đó nếu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{b_n^2} < \infty \text{ thì } \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{b_n} \xrightarrow{h.c.c} 0.$$

Định lí 3.11. *Nếu $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn độc lập, cùng phân phối. Khi đó*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{h.c.c} \mathbb{E}(X_1) \text{ khi và chỉ khi } \mathbb{E}(|X_1|) < \infty.$$

Ví dụ 3.12. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn độc lập có cùng phân phối Bernoulli với $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$. Khi đó S_n là số phép thử thành công trong n phép thử. Theo Định lí 3.11,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{h.c.c} \mathbb{E}(X_1) = p.$$

Điều này xác minh lại khẳng định xác suất thành công của mỗi phép thử là p.

Một ứng dụng khá đơn giản nhưng cực kì hiệu của của Luật mạnh số lớn là phương pháp Monte Carlo.

Ví dụ 3.13. *Giả sử f là một hàm đo được trên đoạn $[0, 1]$ và*

$$\int_0^1 |f(x)|dx < \infty. \tag{3.3}$$

Vì trong phần lớn các ứng dụng thực tế, giá trị của $I = \int_0^1 f(x)dx$ không thể được xác định một cách chính xác bằng các phương pháp *giải tích nên người ta phải xấp xỉ I bởi các phương pháp số. Khi hàm f đủ trơn, I có thể được xấp xỉ khá tốt bằng cách lấy trung bình (có trọng số) của các giá trị của f tại một số điểm cố định. Ví dụ khi f khả vi liên tục đến cấp 2 thì ta có công thức hình bình hành sau*

$$I \approx \frac{f(t_0^n) + 2f(t_1^n) + \ldots + 2f(t_{n-1}^n) + f(t_n^n)}{2n},$$

trong đó $t_i^n = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Tuy nhiên, khi f không đủ trơn phương pháp trên thường tỏ ra kém hiệu quả. Thay vào đó, người ta có thể dùng phương pháp Monte Carlo được phát biểu ở dạng đơn giản nhất như sau: Gọi $(U_j)_{j\geq 1}$ là dãy các bnn độc lập có cùng phân phối đều trên đoạn $[0,1]$ và đặt $I_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(U_j)$. Do $\mathbb{E}[|f(U_j)|] = \int_0^1 |f(x)|dx < \infty$ nên áp dụng Định lí 3.11, ta có I_n hội tụ h.c.c đến $\mathbb{E}[f(U_1)] = I$ khi $n \to \infty$. Để đánh giá sai số của ước lượng, ta giả thiết thêm rằng

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{3.4}$$

Khi đó, bình phương sai số của ước lượng là

$$\mathbb{E}[(I_n - I)^2] = \mathbb{E}[(I_n - \mathbb{E}[I_n])^2] = \frac{1}{n} Df(U_1) \leq \frac{1}{n}\int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Vì vậy nếu ta có thể sinh ra dãy $(U_j)_{j\geq 1}$ trên máy tính thì ta sẽ thu được một ước lượng của I cho hàm f bất kì thỏa mãn điều kiện (3.3). Dưới điều kiện (3.4), sai số của ước lượng chỉ phụ thuộc vào cỡ mẫu

*n mà không phụ thuộc vào độ trơn của f. Phương pháp Monte Carlo cũng tỏ ra hiệu quả hơn các phương pháp tất định khi tính các tích phân bội nhiều lớp. Người ta đã tìm ra rất nhiều các cải tiến của phương pháp Monte Carlo mô tả ở trên nhằm giảm bình phương sai số của ước lượng, qua đó tăng độ chính xác và giảm thời gian tính toán trên máy tính (xem [**?**]).*

Sai số của phương pháp Monte Carlo có thể được phân tích kĩ hơn dựa trên định lí giới hạn trung tâm được trình bày sau đây.

3.3 Định lí giới hạn trung tâm

3.3.1 Hàm đặc trưng

Định nghĩa 3.14. *1. Hàm đặc trưng của bnn X được xác định là ánh xạ $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cho bởi*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x).$$

2. Hàm đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên $X = (X_1, \dots, X_n)$ là ánh xạ $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ cho bởi

$$\varphi_X(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i\sum_{j=1}^n t_j X_j\Big)\Big].$$

Định lí 3.15. *Với mọi bnn X, φ_X là hàm bị chặn, liên tục và $\varphi_X(0) = 1$.*

Chứng minh. Dễ thấy $\varphi_X(0) = 1$. Hơn nữa, áp dụng bất đẳng thức $(\mathbb{E}X)^2 \le \mathbb{E}(X^2)$, ta được

$$|\varphi_X(t)| = \sqrt{(\mathbb{E}\cos tX)^2 + (\mathbb{E}\sin tX)^2} \le \sqrt{\mathbb{E}(\cos^2 tX) + \mathbb{E}(\sin^2 tX)} = 1.$$

Cuối cùng, tính liên tục của φ_X là hệ quả trực tiếp của định lí hội tụ bị chặn Lebesgue. □

Định lí 3.16. *Giả sử bnn X có $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$ với số tự nhiên m nào đó. Khi đó hàm đặc trưng φ_X có đạo hàm liên tục đến cấp m tại mọi điểm và*

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX}), \tag{3.5}$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}, \tag{3.6}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}(X^k) + \frac{(it)^n}{n!}\alpha_n(t), \tag{3.7}$$

trong đó $|\alpha_n(t)| \le 2\mathbb{E}(|X^n|)$ và $\alpha_n(t) \to 0$ khi $t \to 0$.

Đảo lại, nếu $\varphi^{(2m)}(0)$ tồn tại và hữu hạn với số nguyên dương m nào đó thì $\mathbb{E}(X^{2m}) < \infty$.

Chứng minh. Do $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$ nên với mọi $k = 1, \ldots, m$ ta có $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$, và do đó

$$\sup_t \int |(ix)^k e^{itx}| dF_X(x) \le \int |x|^k dF_X(x) < \infty.$$

Theo định lí Lebesgue, ta có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân để thu được (3.5). (3.6) là hệ quả của (3.5) khi cho $t = 0$. Mặt khác, áp dụng khai triển Taylor cho hàm e^x tại 0, ta được

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{itx}) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(itX)^k}{k!} + \frac{(itX)^n}{n!}e^{i\theta X}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}(X^k) + \frac{(it)^n}{n!}\Big(\mathbb{E}(X^n) + \alpha_n(t)\Big),\end{aligned}$$

trong đó $|\theta| \le 1$, $\alpha_n(t) = \mathbb{E}\Big(X^n(e^{itX} - 1)\Big)$. Ta có $|\alpha_n(t)| \le 2\mathbb{E}(|X|^n)$ và áp dụng định lí hội tụ bị chặn, ta có $\alpha_n(t) \to 0$ khi $t \to 0$. Khẳng định ngược lại được chứng minh bằng qui nạp, độc giả tham khảo chi tiết tại trang 190–193[3]. □

Ví dụ 3.17. *Giả sử X có phân phối Poisson với tham số $\lambda > 0$. Ta có*

$$\varphi_t(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}e^{itk} = e^{-ld}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Ví dụ 3.18. *Giả sử X có phân phối chuẩn $N(0,1)$. Khi đó*

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tx}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx.$$

Do hàm $x \mapsto e^{-x^2/2}\sin tx$ là hàm khả tích và lẻ nên tích phân thứ hai bằng 0. Theo Định li 3.16 ta có thể đạo hàm hai vế của đẳng thức trên theo t và thu được

$$\varphi_X'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tx}{\sqrt{2\pi}}xe^{-x^2/2}dx.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta được

$$\varphi_X'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{\sqrt{2\pi}} te^{-x^2/2}dx = -t\varphi_X(t).$$

Giải phương trình vi phân $\frac{\varphi_X'}{\varphi_X} = -t$ *với điều kiện* $\varphi_X(0) = 1$*, ta được*

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}.$$

Nếu X *có phân phối chuẩn* $N(a, \sigma^2)$ *thì*

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Đổi biến $y = (x - a)/\sigma$*, ta được*

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{ita}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{it\sigma y} e^{-y^2/2} dy = e^{ita - t^2\sigma^2/2}.$$

Định lí 3.19. *Hai véc tơ ngẫu nhiên có cùng phân phối khi và chỉ khi hàm đặc trưng của chúng bằng nhau.*

Ví dụ 3.20. *Giả sử* X *và* Y *là hai bnn độc lập có phân phối Poisson với tham số lần lượt là* μ *và* λ*. Khi đó theo Ví dụ 3.17,* $X + Y$ *có hàm đặc trưng là*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{itY}) = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}.$$

Do đó $X + Y$ *có phân phối Poisson với tham số* $\mu + \lambda$*.*

Định lí 3.21. *Các bnn* $X_1, \ldots, X_n$ *là độc lập với nhau khi và chỉ khi*

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \ldots \varphi_{X_n}(t_n) \ \text{ với mọi } \ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ví dụ 3.22. *Giả sử X và Y là hai bnn độc lập có cùng phân phối chuẩn $N(0,1)$. Theo Ví dụ 3.18*

$$\varphi_{(X+Y,X-Y)}(t,s) = \mathbb{E}e^{it(X+Y)+is(X-Y)} = \mathbb{E}e^{i(t+s)X}\mathbb{E}e^{i(t-s)Y} = e^{-t^2-s^2}.$$

Lần lượt cho s và t bằng 0 ở đẳng thức trên, ta được $\varphi_{X+Y}(t) = e^{-t^2}$ và $\varphi_{X-Y}(s) = e^{-s^2}$. Do đó $X+Y$ và $X-Y$ đều có phân phối chuẩn $N(0,2)$. Hơn nữa, chúng là độc lập vì

$$\varphi_{(X+Y,X-Y)}(t,s) = \varphi_{X+Y}(t)\varphi_{X-Y}(s) \text{ với mọi } t,s \in \mathbb{R}.$$

3.3.2 Hội tụ yếu

Định nghĩa 3.23. *Dãy bnn (X_n) được gọi là* hội tụ yếu *đến bnn X, kí hiệu là $X_n \xrightarrow{w} X$, nếu với mọi hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và bị chặn, ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

Khi $X_n \xrightarrow{w} X$ ta cũng nói phân phối F_{X_n} hội tụ yếu đến phân phối F_X và kí hiệu $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$.

Lưu ý rằng trong định nghĩa trên ta không cần phải giả thiết tất cả các bnn $(X_n)_{n\geq 1}$ xác định trên cùng một không gian xác suất. Người ta còn gọi hội tụ yếu là *hội tụ theo phân phối* (xem Bài tập 3.21).

Mệnh đề 3.24. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *và* X *là các bnn xác định trên cùng không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Nếu* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *thì* $X_n \xrightarrow{w} X$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ nhưng $X_n \overset{w}{\not\longrightarrow} X$. Khi đó tồn tại một hàm liên tục bị chặn f, hằng số $\epsilon > 0$ và dãy con $(n_k)_{k\geq 1}$ của dãy số tự nhiên sao cho

$$|\mathbb{E}(f(X_{n_k})) - \mathbb{E}(f(X))| > \epsilon \text{ với mọi } k \geq 1. \tag{3.8}$$

Theo Mệnh đề 3.5, tồn tại dãy con $(m_k)_{k\geq 1}$ của dãy $(n_k)_{k\geq 1}$ sao cho $X_{m_k} \xrightarrow{h.c.c} X$. Do f liên tục nên $f(X_{m_k}) \xrightarrow{h.c.c} f(X)$. Lại do f bị chặn nên áp dụng định lí hội tụ bị chặn Lebesgue, $\mathbb{E}(f(X_{m_k})) \to \mathbb{E}(f(X))$. Điều này mâu thuẫn với (3.8). Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 3.25. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *và* X *là các bnn xác định trên cùng không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Nếu* $X_n \xrightarrow{w} X$ *và* $X = const$ *h.c.c thì* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Chứng minh. Giả sử $X \equiv a$ h.c.c. Xét hàm liên tục và bị chặn $f(x) = \frac{|x-a|}{|x-a|+1}$. Do $X_n \xrightarrow{w} a$ nên $\mathbb{E}(f(X_n)) \to f(a) = 0$. Theo Mệnh đề 3.2 ta có $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$. □

Định lí sau cho ta một tiêu chuẩn rất hữu hiệu để kiểm tra sự hội tụ yếu của một dãy bnn. Chứng minh định lí có thể được tham khảo trong [3] trang 196-199.

Định lí 3.26. *Giả sử* $(F_n)_{n\geq 1}$ *là dãy hàm phân phối xác suất với* $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *là dãy hàm đặc trưng tương ứng,*

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x).$$

1. *Nếu* $F_n \xrightarrow{w} F$ *với* F *là hàm phân phối xác suất nào đó thì* (φ_n) *hội tụ điểm đến hàm đặc trưng* φ *của* F.

2. *Giả sử* $\varphi_n(t) \to \varphi(t),\ t \in \mathbb{R}$. *Khi đó hai mệnh đề sau là tương đương*

   (a) $\varphi(t)$ *là hàm đặc trưng và* $F_n \xrightarrow{w} F$ *với* F *là hàm phân phối xác suất tương ứng với* φ;

   (b) φ *liên tục tại* $t = 0$.

Ví dụ 3.27. *Giả sử với mỗi* $n \geq 1$, *bnn* X_n *có phân phối chuẩn* $N(a_n, \sigma_n^2)$ *trong đó* $a_n \to 0$ *và* $\sigma_n^2 \to 1$ *khi* $n \to \infty$. *Khi đó dãy bnn* (X_n) *hội tụ yếu đến phân phối chuẩn tắc* $N(0, 1)$ *vì*

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{ita_n - \sigma_n^2 t^2/2} \to e^{-t^2/2}.$$

Ví dụ 3.28 (Luật số lớn)**.** *Giả sử* $(X_k)_{k\geq 1}$ *là dãy bnn độc lập cùng phân phối với kì vọng chung là a hữu hạn. Khi đó*

$$\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} a.$$

Thật vậy, đặt $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ và gọi φ là hàm đặc trưng của X_k. Khi đó

$$\varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{S_n}(t/n) = [\varphi(t/n)]^n.$$

Theo Định lí 3.16,

$$\varphi(t/n) = 1 + \frac{ita}{n} + \frac{t}{n}\alpha(t/n),$$

trong đó $\alpha(t) \to 0$ khi $t \to 0$. Do đó

$$\varphi_{S_n/n}(t) = \Big(1 + \frac{ita}{n} + \frac{t}{n}\alpha(t/n)\Big)^n \to e^{ita}$$

khi $n \to \infty$. Lưu ý rằng nếu bnn $X \equiv a$ thì hàm đặc trưng của X là $\varphi_X(t) = e^{ita}$. Do vậy, $S/n \xrightarrow{w} a$. Áp dụng Mệnh đề 3.25 ta được điều phải chứng minh.

3.3.3 Định lí giới hạn trung tâm

Định lí 3.29. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn độc lập và cùng phân phối với $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ và $DX_n = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Đặt $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Khi đó dãy bnn $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ hội tụ theo phân phối tới bnn Y có phân phối chuẩn $N(0, 1)$.*

Chứng minh. Gọi φ là hàm đặc trưng của bnn $X_n - \mu$. Do $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn có cùng phân phối nên φ không phụ thuộc vào n.

Do các bnn $(X_j)_{j\geq 1}$ là độc lập nên

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}\exp\Big(it\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\exp\Big(it\frac{X_j-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Big(\varphi\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big)^n.$$

Do $\mathbb{E}(X_j-\mu)=0$ và $\mathbb{E}((X_j-\mu)^2)=\sigma^2$ nên theo Định lí 3.16, φ có đạo hàm cấp hai liên tục và hơn nữa

$$\varphi(t) = 1-\frac{\sigma^2t^2}{2}+t^2\alpha(t),$$

trong đó $\alpha(t)\to 0$ khi $t\to 0$. Do đó sử dụng khai triển $\ln(1+x)=x+o(x)$ khi $x\to 0$, ta được

$$\ln\varphi_{Y_n}(t) = n\ln\Big(1-\frac{t^2}{2n}+\frac{t^2}{n\sigma^2}\alpha\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big)\to -\frac{t^2}{2},$$

tức là $\varphi_{Y_n}(t)\to e^{-t^2/2}$ khi $n\to\infty$. Áp dụng Định lí 3.26 ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.30. *Giả sử $(X_j)_{j\geq 1}$ là dãy bnn độc lập cùng phân phối với $\mathbb{P}(X_j=1)=p$ và $\mathbb{P}(X_j=0)=1-p$ với $p\in(0,1)$. Ta có $\mu=\mathbb{E}(X_j)=p$ và $\sigma^2=DX_j=p(1-p)$. Theo Luật mạnh số lớn, ta có*

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{h.c.c} p,$$

và theo Định lí Giới hạn trung tâm 3.29, ta có

$$\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow{w} Z\sim N(0,1).$$

Trong thực tế ta thường quan tâm đến bài toán: cho trước sai số $\epsilon > 0$ và độ tin cậy $1-\alpha$, tìm cỡ mẫu n sao cho

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| < \epsilon\Big) \geq 1 - \alpha.$$

- *Theo bất đẳng thức Chebyshev*

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| < \epsilon\Big) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2},$$

nên cần chọn $n = n_C = [(4\epsilon^{-2}\alpha)^{-}1] + 1$.

- *Theo Định lí giới hạn trung tâm thì*

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| < \epsilon\Big) \sim \Phi\Big(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big) \geq 2\Phi(2\epsilon\sqrt{n}) - 1.$$

với $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt$. Do đó cần chọn $n = n_{CLT} = [x_\alpha^2/(4\epsilon^2)] + 1$, trong đó x_α thỏa mãn $\Phi(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Ví dụ, để $\epsilon = 0.02$ và $1-\alpha = 0.95$ thì ta cần chọn $n_C = 12500$ trong khi $n_{CLT} = 2500$.

Để xác định được tốc độ hội tụ của F_{Y_n} tới phân phối chuẩn, người ta sử dụng bất đẳng thức Berry-Esseen: Giả sử $\mathbb{E}(|X_1|^3) < \infty$ thì

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \Big|F_{Y_n}(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt\Big| \leq K_{BE}\frac{\mathbb{E}(|X_1 - \mathbb{E}X_1|^3)}{\sigma^3\sqrt{n}}, \qquad (3.9)$$

trong đó K_{BE} là hằng số thuộc khoảng $(\frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}, 0.4748)$ (xem [2]).

Định lí giới hạn trung tâm vẫn còn đúng nếu ta thay giả thiết độc lập và cùng phân phối của dãy bnn $(X_n)_{n\geq 1}$ bởi các giả thiết yếu hơn. Sau đây ta phát biểu định lí giới hạn trung tâm của Lindeberg. Chứng minh của định lí được trình bày trong [3], trang 221-225.

Định lí 3.31. *Giả sử $(X_n)_{n\geq 1}$ là dãy bnn độc lập có kì vọng và phương sai hữu hạn. Đặt $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = DX_1 + \ldots + DX_n$. Khi đó nếu*

$$L_n(\epsilon) := \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big((X_k - \mathbb{E}X_k)^2 \mathbb{I}_{\{|X_k - \mathbb{E}X_k| > \epsilon B_n\}}\Big) \to 0,\ \forall \epsilon > 0, \quad (3.10)$$

thì $S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{B_n}$ hội tụ theo phân phối đến bnn Y có phân phối chuẩn tắc.

Bài tập

3.1. *CMR $d_{\mathbb{P}}$ là một metric trên không gian L^0, tức là*

1. *$d(X,Y) \geq 0$ và $d(X,Y) = 0$ khi và chỉ khi $X = Y$ hầu chắc chắn;*
2. *$d(X,Y) = d(Y,X)$;*
3. *$d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$;*

với mọi bnn X, Y, Z.

3.2. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn thỏa mãn* $d(X_m, X_n) \to 0$ *khi* $m, n \to \infty$. *CMR tồn tại bnn* Y *sao cho* $X_n \to Y$ *theo xác suất.*

3.3. *CMR dãy bnn* $(X_n)_{n\geq 1}$ *hội tụ theo xác suất đến bnn* X *khi và chỉ khi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X| \wedge 1) = 0.$$

3.4 (Xấp xỉ đa thức)**.** *Giả sử* f *là hàm thực xác định và liên tục trên đoạn* $[0,1]$. *Với mỗi* $n \in \mathbb{N}$, *đặt*

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} f(m/n).$$

Chứng minh rằng

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

3.5. *Trong hộp có n viên bi được đánh số từ* 1 *đến n. Một người lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp, xem số rồi trả lại hộp. Quá trình trên được lặp lại cho đến khi người đó xem được số của tất cả n viên bi trong hộp. Gọi* T_n *là số lần lấy bi đã thực hiện. Chứng minh rằng*

$$\frac{T_n}{n \ln n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

3.6. *Cho* 2*n quả bóng một cách ngẫu nhiên vào n cái hộp (mỗi hộp có thể chứa từ* 0 *đến* 2*n bóng). Gọi* N_n *là số các hộp không chứa bóng nào. CMR*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{-2}.$$

3.7. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn độc lập và có cùng phân phối*

$$\mathbb{P}[X_i = (-1)^k k] = \frac{C}{k^2 \ln k}, \quad k \geq 2,$$

trong đó $C^{-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$. *CMR* $\mathbb{E}[|X_1|] = \infty$ *nhưng tồn tại hằng số hữu hạn* μ *sao cho* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$.

3.8. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn độc lập và có cùng phân phối với* $\mathbb{P}[X_i > x] = \frac{e}{x \ln x}$ *khi* $x \geq 2$. *CMR* $\mathbb{E}[X_i] = \infty$ *và tồn tại dãy hằng số* $\mu_n \to \infty$ *sao cho*

$$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

3.9. *Đặt* $p_k = 1/2^k k(k+1)$ *với* $k = 1, 2, \ldots$ *và* $p_0 = 1 - \sum_{k\geq 1} p_k$. *Xét* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn độc lập có cùng phân phối với*

$$\mathbb{P}[X_i = -1] = p_0, \quad \mathbb{P}[X_i = 2^k - 1] = p_k, \ \forall k \geq 1.$$

Đặt $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. *CMR*

$$\frac{S_n}{n/\log_2 n} \xrightarrow{\mathbb{P}} -1.$$

3.10 (Bổ đề Borel-Cantelli). *1) Giả sử* $(A_n)_{n\geq 1}$ *là dãy biến cố thỏa mãn* $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$. *Khi đó*

$$\mathbb{P}\Big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \Big) = 0.$$

2) Giả sử $(A_n)_{n\geq 1}$ *là dãy biến cố* độc lập *thỏa mãn* $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$. *Khi đó*

$$\mathbb{P}\Big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \Big) = 1.$$

3.11. *Giả sử không gian xác suất* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ *với* λ *là độ đo Lebesgue. Đặt* $A_n = [0; \frac{1}{n})$. *CMR* $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$ *và* $\mathbb{P}\Big(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$.

3.12. *Giả sử* (A_n) *là dãy bnn độc lập thỏa mãn* $\mathbb{P}(A_n) < 1$ *với mọi* n. *CMR nếu* $\mathbb{P}(\cup A_n) = 1$ *thì* $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

3.13. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn độc lập. CMR* $\sup_n X_n < \infty$ *khi và chỉ khi* $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[X_n > A] < \infty$ *với số thực* A *nào đó.*

3.14. *Giả sử* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn độc lập và cùng phân phối. Tìm điều kiện cần và đủ để*

1. Y_n/n *hội tụ h.c.c đến* 0;

2. $(\max m \leq nY_m)/n$ *hội tụ h.c.c đến* 0;

3. $(\max m \leq nY_m)/n$ *hội tụ theo xác suất đến* 0;

4. Y_n/n *hội tụ theo xác suất đến* 0;

3.15. *Giả sử* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *là không gian xác suất rời rạc. CMR dãy bnn* X_n *hội tụ h.c.c khi và chỉ khi nó hội tụ theo xác suất.*

3.16. *Giả sử* $(X_n)_{n\geq 1}$ *là dãy bnn độc lập có cùng phân phối Cauchy với hàm mật độ*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Chứng minh rằng S_n/n có cùng phân phối với X_1 với mọi n. Tức là dãy (X_n) không tuân theo luật số lớn.

3.17. *Giả sử $(A_n)_{n\geq 1}$ là dãy biến cố độc lập từng đôi và $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. CMR*

$$\frac{\sum_{m=1}^{n} \mathbb{I}_{A_m}}{\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(A_m)} \xrightarrow{h.c.c} 1.$$

Giải 3.17: Đặt $X_m = \mathbb{I}_{A_m}$ và đặt $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Do A_m là đôi một độc lập nên các X_m cũng là đôi một không tương quan, vậy nên

$$DS_n = \sum_{i=1}^{n} DX_i \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[S_n].$$

Áp dụng BĐT Chebyshev, ta có

$$\mathbb{P}[|S_n - \mathbb{E}S_n| > \delta \mathbb{E}S_n] \leq \frac{DS_n}{\delta^2(\mathbb{E}[S_n])^2} \leq \frac{1}{\delta^2 \mathbb{E}[S_n]} = \frac{1}{\delta^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)} \to 0.$$

Vậy nên $\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} \to 1$ theo xác suất. Để chứng minh hội tụ hầu chắc chắn ta đặt $n_k = \inf\{n : \mathbb{E}[S_n] \geq k^2\}$ và $T_k = S_{n_k}$. Vì $\mathbb{E}[X_m] \leq 1$ nên $k^2 \leq \mathbb{E}[T_k] \leq k^2 + 1$. Hơn nữa, vì

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[|T_k - \mathbb{E}T_k] \geq \delta \mathbb{E}T_k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2 k^2} < \infty,$$

nên $T_k/\mathbb{E}[T_k] \to 1$ h.c.c. Lại do

$$\frac{T_k}{\mathbb{E}[T_{k+1}]} \leq \frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} \leq \frac{T_{k+1}}{\mathbb{E}[T_k]},$$

hầu chắc chắn với mọi $n_k \le n < n_{k+1}$ nên suy ra điều phải chứng minh.

3.18. *Cho* $(X_n)_{n\ge1}$ *là dãy bnn thỏa mãn* $0 \le X_1 \le X_2 \ldots$ *và* $\mathbb{E}[X_n] \sim an^{\alpha}$ *và* $DX_n \le bn^{\beta}$ *với* $a, b, \alpha > 0$ *và* $2\alpha > \beta$. *CMR* $X_n/n^{\alpha} \to a$ *h.c.c.*

3.19. *Giả sử* $(X_n)_{n\ge1}$ *là dãy bnn độc lập và* X_n *có phân phối Poisson với* $\mathbb{E}[X_n] = \lambda_n$. *Đặt* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. *CMR nếu* $\sum_n \lambda_n = \infty$ *thì* $S_n/\mathbb{E}[S_n] \to 1$ *h.c.c.*

3.20. *Giả sử* $(X_n)_{n\ge1}$ *là dãy bnn độc lập và có cùng phân phối F liên tục trên* $\mathbb{R}$. *Đặt*

$$A_k = \{X_k > \sup_{j<k} X_j\}.$$

a) CMR $(A_k)_{k\ge2}$ *là các biến cố độc lập và tính xác suất của chúng.*

b) Đặt $R_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{I}_{A_m}$. *CMR* $R_n/\ln n \to 1$ *h.c.c.*

3.21. *Giả sử* $(X_n)_{n\ge1}$ *và X là các bnn có hàm phân phối lần lượt là* $(F_n)_{n\ge1}$ *và F.*

1. *Nếu* $X_n \xrightarrow{w} X$ *thì* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *với mọi x thuộc tập con trù mật D của* $\mathbb{R}$ *xác định bởi*

$$D = \{x \in \mathbb{R} : F(x+) = F(x)\}.$$

2. *Nếu* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *với mọi x thuộc một tập con trù mật nào đó của* $\mathbb{R}$ *thì* $X_n \xrightarrow{w} X$.

Bảng giá trị hàm phân phối chuẩn $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.5279	0.53188	0.53586
0.1	0.5398	0.5438	0.54776	0.55172	0.55567	0.55966	0.5636	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.5793	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.6293	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.6591	0.66276	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.7224
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.7549
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.7673	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.7823	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.879	0.881	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.9032	0.9049	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.9222	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.9452	0.9463	0.94738	0.94845	0.9495	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.9608	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.9732	0.97381	0.97441	0.975	0.97558	0.97615	0.9767
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.9803	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.983	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.985	0.98537	0.98574
2.2	0.9861	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.9884	0.9887	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.9901	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.9918	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.9943	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.9952
2.6	0.99534	0.99547	0.9956	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.9972	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.9976	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.999

Bảng giá trị hàm phân phối Student

1 phía	75%	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.75%	99.9%	99.95%
2 phía	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
1	1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.08	1.386	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.6
3	0.765	0.978	1.25	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.19	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.61
5	0.727	0.92	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.1	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	3.69	4.297	4.781
10	0.7	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.93	4.318
13	0.694	0.87	1.079	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.14
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.69	0.865	1.071	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.61	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.86	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.85
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.06	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.078	3.45	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.69
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.03	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.05	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2	2.39	2.66	2.915	3.232	3.46
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.99	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.29	1.66	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.39
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	2.86	3.16	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	2.807	3.09	3.291

Bảng giá trị phân phối khi bình phương $\mathbb{P}[\chi_n^2 > x] = \alpha$

$n\backslash\alpha$	0.995	0.975	0.2	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	0.00004	0.001	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	9.55	10.828
2	0.01	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597	12.429	13.816
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86	16.924	18.467
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.07	12.833	13.388	15.086	16.75	18.907	20.515
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	20.791	22.458
7	0.989	1.69	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	22.601	24.322
8	1.344	2.18	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955	24.352	26.124
9	1.735	2.7	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	26.056	27.877
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	27.722	29.588
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.92	22.618	24.725	26.757	29.354	31.264
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.3	30.957	32.909
13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	32.535	34.528
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	34.091	36.123
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	35.628	37.697
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32	34.267	37.146	39.252
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	38.648	40.79
18	6.265	8.231	22.76	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	40.136	42.312
19	6.844	8.907	23.9	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	41.61	43.82
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.41	34.17	35.02	37.566	39.997	43.072	45.315
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	44.522	46.797
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	45.962	48.268
23	9.26	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	47.391	49.728
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.27	42.98	45.559	48.812	51.179
25	10.52	13.12	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	50.223	52.62
26	11.16	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.29	51.627	54.052
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.14	46.963	49.645	53.023	55.476
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	54.411	56.892
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	55.792	58.301
30	13.787	16.791	36.25	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	57.167	59.703

Tài liệu tham khảo

[1] Jacod, J., Protter, P. (2003) Probability Essential. Springer.

[2] Shevtsova, I. (2011). On the absolute constants in the Berry-Esseen type inequalities for identically distributed summands. arXiv preprint arXiv:1111.6554.

[3] Nguyễn Duy Tiến, Vũ Viết Yên (2001) Lý thuyết xác suất. NXB Giáo dục.