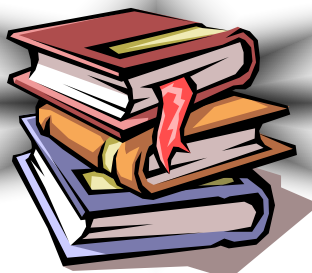


Tailieumontoan.com



Tài liệu sưu tầm



80 BÀI HÌNH HỌC HAY
LUYỆN THI VÀO LỚP 10 THPT

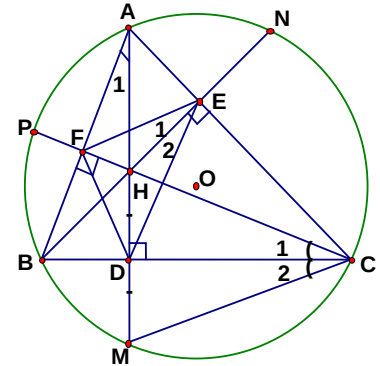


Tài liệu sưu tầm, ngày 27 tháng 5 năm 2020

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp.
2. Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
3. $AE.AC = AH.AD$; $AD.BC = BE.AC$.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle CEH = 90^\circ$ (Vì BE là đường cao)

$\angle CDH = 90^\circ$ (Vì AD là đường cao)

$\Rightarrow \angle CEH + \angle CDH = 180^\circ$

Mà $\angle CEH$ và $\angle CDH$ là hai góc đối của tứ giác CEHD. Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$.

CF là đường cao $\Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \angle BFC = 90^\circ$.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc $90^\circ \Rightarrow E$ và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle AEH = \angle ADC = 90^\circ$; $\angle A$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD.$$

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle BEC = \angle ADC = 90^\circ$; $\angle C$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle BEC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AD.BC = BE.AC.$$

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

$\Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \Rightarrow CB$ là tia phân giác của góc HCM; lại có $CB \perp HM \Rightarrow \triangle CHM$ cân tại C

$\Rightarrow CB$ cũng là đường trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

$\Rightarrow \angle E_1 = \angle E_2 \Rightarrow EB$ là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

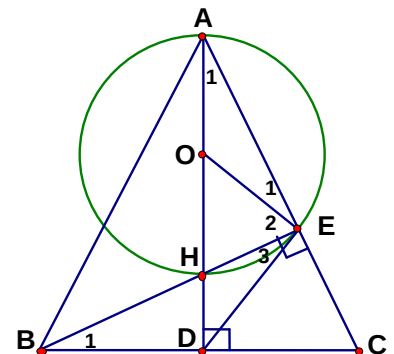
Bài 2. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp.
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh $ED = \frac{1}{2} BC$.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết $DH = 2$ Cm, $AH = 6$ Cm.

Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle CEH = 90^\circ$ (Vì BE là đường cao)



$$\angle CDH = 90^0 \text{ (Vì AD là đường cao)}$$

$$\Rightarrow \angle CEH + \angle CDH = 180^\circ$$

Mà $\angle CEH$ và $\angle CDH$ là hai góc đối của tứ giác $CEHD$. Do đó $CEHD$ là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEA = 90^\circ$.

AD là đường cao $\Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow \angle BDA = 90^\circ$.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc $90^0 \Rightarrow$ E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow D$ là trung điểm của BC . Theo trên ta có $\angle BEC = 90^\circ$.

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến $\Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$.

4. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH $\Rightarrow$ OA = OE $\Rightarrow$ tam giác AOE cân tại O $\Rightarrow \angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên $DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ tam giác DBE cân tại D $\Rightarrow \angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) $\Rightarrow \angle E_1 = \angle E_3 \Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \angle E_2 + \angle E_3 = 90^\circ = \angle OED \Rightarrow DE \perp OE$ tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết $AH = 6 \text{ cm} \Rightarrow OH = OE = 3 \text{ cm.}$; $DH = 2 \text{ cm} \Rightarrow OD = 5 \text{ cm.}$ Áp dụng định lý Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4 \text{ cm}$

Bài 3: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh $AC + BD = CD$.

2. Chứng minh $\angle COD = 90^\circ$.

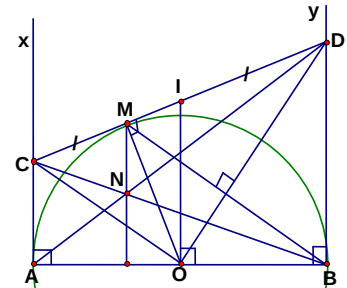
3. Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.

4.Chứng minh OC // BM

5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

5. Chứng minh $MN \perp AB$.

6. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CA = CM$; $DB = DM \Rightarrow AC + BD = CM + DM$.

Mà $CM + DM = CD \Rightarrow AC + BD = CD$

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù $\Rightarrow \angle COD = 90^\circ$.

3. Theo trên $\angle COD = 90^\circ$ nên tam giác COD vuông tại O có $OM \perp CD$ (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OM^2 = CM \cdot DM$,

$$\text{Mà } OM = R; CA = CM; DB = DM \Rightarrow AC \cdot BD = R^2 \Rightarrow AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}.$$

4. Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên $OC \perp OD$.(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB = DM$; lại có $OM = OB = R \Rightarrow OD$ là trung trực của $BM \Rightarrow BM \perp OD$. (2). Từ (1) Và (2) $\Rightarrow OC \parallel BM$ (Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AC \perp AB$; $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow$ tứ giác ACDB là hình thang.

Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB $\Rightarrow$ IO là đường trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow IO \parallel AC$, mà $AC \perp AB \Rightarrow IO \perp AB$ tại $O \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà $CA = CM$; $DB = DM$ nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

$\Rightarrow MN \parallel BD$ mà $BD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác $ACDB = AB + AC + CD + BD$ mà $AC + BD = CD$ nên suy ra chu vi tứ giác $ACDB = AB + 2CD$ mà AB không đổi nên chu vi tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất, mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By . Khi đó $CD \parallel AB \Rightarrow M$ phải là trung điểm của cung AB .

Bài 4 Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK .

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết $AB = AC = 20$ Cm, $BC = 24$ Cm.

Lời giải: (HD)

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B Do đó $BI \perp BK$ hay $\angle IBK = 90^\circ$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^\circ$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH .
 $\angle C_2 + \angle I_1 = 90^\circ$ (2) (vì $\angle IHC = 90^\circ$).
 $\angle I_1 = \angle ICO$ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

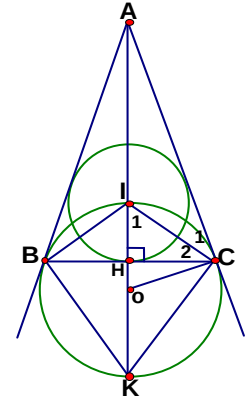
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle C_1 + \angle ICO = 90^\circ$ hay $AC \perp OC$. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

3. Từ giả thiết $AB = AC = 20$ Cm, $BC = 24$ Cm $\Rightarrow CH = 12$ cm.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (cm)}$$

$$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9 \text{ (cm)}$$

$$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ (cm)}$$



Bài 5: Cho đường tròn $(O; R)$, từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O) . Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP , kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của OM và AB .

1. Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI. IM = IA^2$.
4. Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Lời giải:

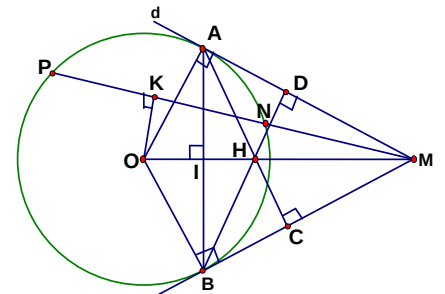
1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính

Và đây cung) $\Rightarrow \angle OKM = 90^\circ$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^\circ$; $\angle OBM = 90^\circ$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90° nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM .

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có $MA = MB$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); $OA = OB = R$



$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^\circ$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow OI \cdot OM = OA^2$ hay $OI \cdot OM = R^2$; và $OI \cdot IM = IA^2$.

4. Ta có $OB \perp MB$ (tính chất tiếp tuyến); $AC \perp MB$ (gt) $\Rightarrow OB \parallel AC$ hay $OB \parallel AH$.

$OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến); $BD \perp MA$ (gt) $\Rightarrow OA \parallel BD$ hay $OA \parallel BH$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $OAHB$ là hình bình hành; lại có $OA = OB (=R) \Rightarrow OAHB$ là hình thoi.

5. Theo trên $OAHB$ là hình thoi. $\Rightarrow OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng (Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên $OAHB$ là hình thoi. $\Rightarrow AH = AO = R$. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R . Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính $AH = R$

Bài 6 hotoancapba.com Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH . Gọi HD là đường kính của đường tròn $(A; AH)$. Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E .

1. Chứng minh tam giác BEC cân.

2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE , Chứng minh rằng $AI = AH$.

3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$.

4. Chứng minh $BE = BH + DE$.

Lời giải: (HD)

1. $\triangle AHC = \triangle ADE$ (g.c.g) $\Rightarrow ED = HC$ (1) và $AE = AC$ (2).

Vì $AB \perp CE$ (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của $\triangle BEC \Rightarrow BEC$ là tam giác cân. $\Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2$

2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2 \Rightarrow \triangle AHB = \triangle AIB \Rightarrow AI = AH$.

3. $AI = AH$ và $BE \perp AI$ tại $I \Rightarrow BE$ là tiếp tuyến của $(A; AH)$ tại I .

4. $DE = IE$ và $BI = BH \Rightarrow BE = BI + IE = BH + ED$

Bài 7 Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M .

1. Chứng minh rằng tứ giác $APMO$ nội tiếp được một đường tròn.

2. Chứng minh $BM \parallel OP$.

3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N . Chứng minh tứ giác $OBPN$ là hình bình hành.

4. Biết AN cắt OP tại K , PM cắt ON tại I ; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải:

1. (HS tự làm).

2. Ta có $\angle ABM$ nội tiếp chắn cung AM ; $\angle AOM$ là góc ở tâm

chắn cung $AM \Rightarrow \angle ABM = \frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác $\angle AOM$

(t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle AOP = \frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle ABM = \angle AOP$ (3)

Mà $\angle ABM$ và $\angle AOP$ là hai góc đồng vị nên suy ra $BM \parallel OP$. (4)

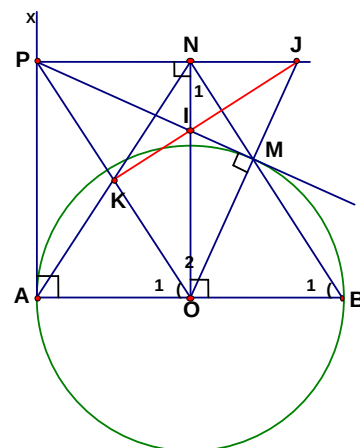
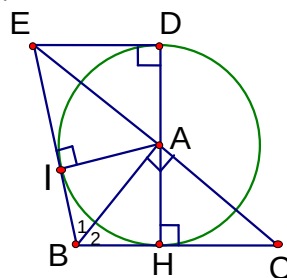
3. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : $\angle PAO = 90^\circ$ (vì PA là tiếp tuyến); $\angle NOB = 90^\circ$ (gt $NO \perp AB$).

$\Rightarrow \angle PAO = \angle NOB = 90^\circ$; $OA = OB = R$; $\angle AOP = \angle OBN$ (theo (3)) $\Rightarrow \triangle AOP = \triangle OBN \Rightarrow OP = BN$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow OBPN$ là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác $OBPN$ là hình bình hành $\Rightarrow PN \parallel OB$ hay $PJ \parallel AB$, mà $ON \perp AB \Rightarrow ON \perp PJ$

Ta cũng có $PM \perp OJ$ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ . (6)



Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có $\angle PAO = \angle AON = \angle ONP = 90^\circ \Rightarrow K$ là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle APO = \angle NOP$ (so le) (7)

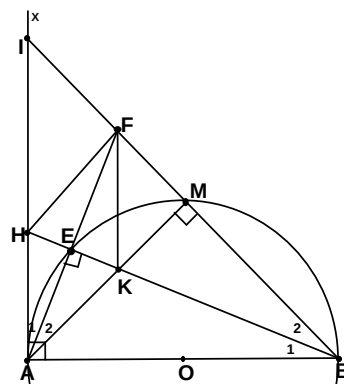
Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác $\angle APM \Rightarrow \angle APO = \angle MPO$ (8).

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \Delta IPO$ cân tại I có IK là trung tuyến đồng thời là đường cao $\Rightarrow IK \perp PO$. (9)

Từ (6) và (9) $\Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 8 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

- 1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM \cdot IB$.
- 3) Chứng minh BAF là tam giác cân.
- 4) Chứng minh rằng: Tứ giác AKFH là hình thoi.
- 5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.



Lời giải:

1. Ta có: $\angle AMB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle KMF = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).

$\angle AEB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle KEF = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).

$\Rightarrow \angle KMF + \angle KEF = 180^\circ$. Mà $\angle KMF$ và $\angle KEF$ là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có $\angle IAB = 90^\circ$ (vì AI là tiếp tuyến) $\Rightarrow \Delta AIB$ vuông tại A có $AM \perp IB$ (theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow AI^2 = IM \cdot IB$.

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM $\Rightarrow \angle IAE = \angle MAE \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{ME}$ (lí do)

$\Rightarrow \angle ABE = \angle MBE$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow BE$ là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AF$ hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BAF$ là tam giác cân. tại B.

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow E$ là trung điểm của AF. (3)

Từ $BE \perp AF \Rightarrow AF \perp HK$ (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác $\angle HAK$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow HAK$ là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow E$ là trung điểm của HK. (6).

Từ (3), (4) và (6) $\Rightarrow AKFH$ là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

5. (HD). Theo trên AKFH là hình thoi $\Rightarrow HA \parallel FK$ hay $IA \parallel FK \Rightarrow$ tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB $\Rightarrow \angle ABM = \angle MAI = 45^\circ$ (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có $\angle ABI = 45^\circ \Rightarrow \angle AIB = 45^\circ$. (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \angle IAK = \angle AIF = 45^\circ \Rightarrow AKFI$ là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau). Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh $\angle ABD = \angle DFB$.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.
2. $DF \parallel BC$.
3. Tứ giác BDFC nội tiếp.
4. $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

Lời giải:

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AD = AF \Rightarrow$ tam giác ADF cân tại A $\Rightarrow \angle ADF = \angle AFD < 90^\circ \Rightarrow$ số cung DF $< 180^\circ \Rightarrow \angle DEF < 90^\circ$ (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có $\angle DFE < 90^\circ$; $\angle EDF < 90^\circ$. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

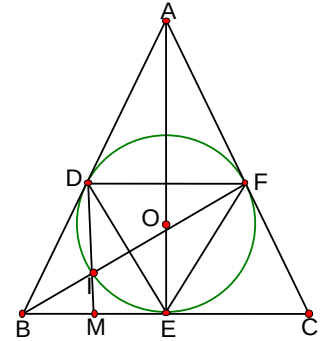
2. Ta có $AB = AC$ (gt); $AD = AF$ (theo trên) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow DF \parallel BC$.

3. $DF \parallel BC \Rightarrow$ BDFC là hình thang lại có $\angle B = \angle C$ (vì tam giác ABC cân)

$\Rightarrow$ BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn.

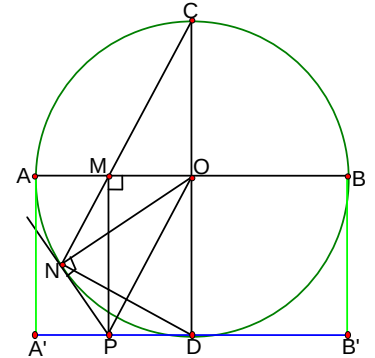
4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có $\angle DBM = \angle BCF$ (hai góc đáy của tam giác cân). $\angle BDM = \angle BFD$ (nội tiếp cùng chắn cung DI); $\angle CBF = \angle BFD$ (vì so le) $\Rightarrow \angle BDM = \angle CBF$.

$\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle CBF \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$



Bài 12 Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh:

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.



Lời giải:

1. Ta có $\angle OMP = 90^\circ$ (vì $PM \perp AB$); $\angle ONP = 90^\circ$ (vì NP là tiếp tuyến).

Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng $90^\circ \Rightarrow$ M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP $\Rightarrow$ Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp $\Rightarrow \angle OPM = \angle ONM$ (nội tiếp chắn cung OM)

Tam giác ONC cân tại O vì có $ON = OC = R \Rightarrow \angle ONC = \angle OCN$
 $\Rightarrow \angle OPM = \angle OCM$.

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có $\angle MOC = \angle OMP = 90^\circ$; $\angle OPM = \angle OCM \Rightarrow \angle CMO = \angle POM$ lại có MO là cạnh chung $\Rightarrow \triangle OMC = \triangle MOP \Rightarrow OC = MP$. (1)

Theo giả thiết Ta có $CD \perp AB$; $PM \perp AB \Rightarrow CO \parallel PM$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có $\angle MOC = 90^\circ$ (gt $CD \perp AB$); $\angle DNC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle MOC = \angle DNC = 90^\circ$ lại có $\angle C$ là góc chung $\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle NDC$

$\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = CO \cdot CD$ mà $CO = R$; $CD = 2R$ nên $CO \cdot CD = 2R^2$ không đổi $\Rightarrow CM \cdot CN$

$= 2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

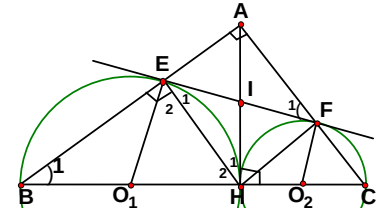
4. (HD) Dễ thấy $\triangle OMC = \triangle DPO$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ODP = 90^\circ \Rightarrow P$ chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.

Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên đoạn thẳng A' B' song song và bằng AB.

Bài 13 Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB > AC$), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

Lời giải:



1. Ta có: $\angle BEH = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle AEH = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle CFH = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle AFH = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (2)

$\angle EAF = 90^\circ$ (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn $\Rightarrow \angle F_1 = \angle H_1$ (nội tiếp chắn cung AE).

Theo giả thiết $AH \perp BC$ nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2)

$\Rightarrow \angle B_1 = \angle H_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) $\Rightarrow \angle B_1 = \angle F_1 \Rightarrow \angle EBC + \angle EFC = \angle AFE + \angle EFC$

mà $\angle AFE + \angle EFC = 180^\circ$ (vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \angle EBC + \angle EFC = 180^\circ$ mặt khác $\angle EBC$ và $\angle EFC$ là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có $\angle A = 90^\circ$ là góc chung; $\angle AFE = \angle ABC$ (theo Chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC.$$

* **HD cách 2:** Tam giác AHB vuông tại H có $HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB$ (*)

Tam giác AHC vuông tại H có $HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF \cdot AC$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật $\Rightarrow IE = EH \Rightarrow \triangle IEH$ cân tại I $\Rightarrow \angle E_1 = \angle H_1$.

$\triangle O_1EH$ cân tại O_1 (vì có O_1E và O_1H cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle E_2 = \angle H_2$.

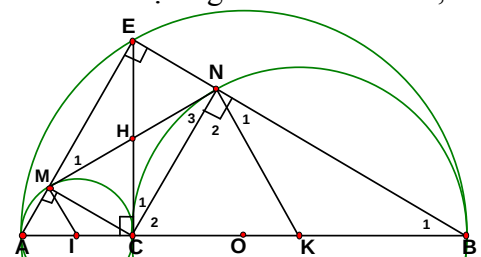
$\Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle O_1EF = 90^\circ$

$\Rightarrow O_1E \perp EF$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $O_2F \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

Bài 14 Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AC = 10$ Cm, $CB = 40$ Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K.

Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).



1. Chứng minh $EC = MN$.

2. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn (I), (K).

3. Tính MN.

4. Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

Lời giải:

1. Ta có: $\angle BNC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)

$\Rightarrow \angle ENC = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle AMC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm I) $\Rightarrow \angle EMC = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (2)

$\angle AEB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay $\angle MEN = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ tứ giác CMEN là hình chữ nhật $\Rightarrow EC = MN$ (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết $EC \perp AB$ tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)
 $\Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên $\Rightarrow \angle C_1 = \angle N_3$
 $\Rightarrow \angle B_1 = \angle N_3$. (4) Lại có $KB = KN$ (cùng là bán kính) $\Rightarrow$ tam giác KBN cân tại K $\Rightarrow \angle B_1 = \angle N_1$ (5)
 Từ (4) và (5) $\Rightarrow \angle N_1 = \angle N_3$ mà $\angle N_1 + \angle N_2 = \angle CNB = 90^\circ \Rightarrow \angle N_3 + \angle N_2 = \angle MNK = 90^\circ$ hay $MN \perp KN$
 tại N $\Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có $\angle AEB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) $\Rightarrow \triangle AEB$ vuông tại A có $EC \perp AB$ (gt)
 $\Rightarrow EC^2 = AC \cdot BC \Leftrightarrow EC^2 = 10 \cdot 40 = 400 \Rightarrow EC = 20$ cm. Theo trên $EC = MN \Rightarrow MN = 20$ cm.

4. Theo giả thiết $AC = 10$ cm, $CB = 40$ cm $\Rightarrow AB = 50$ cm $\Rightarrow OA = 25$ cm

Ta có $S_{(O)} = \pi \cdot OA^2 = \pi \cdot 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi \cdot IA^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$; $S_{(K)} = \pi \cdot KB^2 = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$.

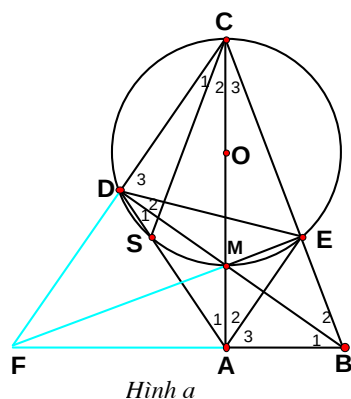
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2} (S_{(O)} - S_{(I)} - S_{(K)})$

$$S = \frac{1}{2} (625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2} \cdot 200\pi = 100\pi \approx 314 \text{ (cm}^2\text{)}$$

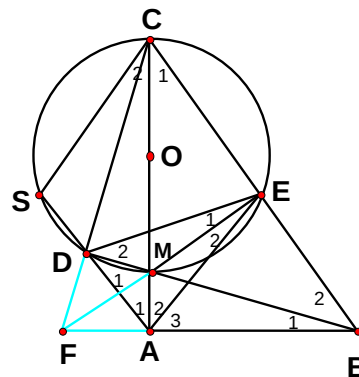
Bài 15 Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Lời giải:



Hình a



Hình b

1. Ta có $\angle CAB = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle MDC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle CDB = 90^\circ$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90° nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC $\Rightarrow$ ABCD là tứ giác nội tiếp.
2. ABCD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle D_1 = \angle C_3$ (nội tiếp cùng chắn cung AB).
 $\angle D_1 = \angle C_3 \Rightarrow \widehat{SM} = \widehat{EM} \Rightarrow \angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)
 $\Rightarrow$ CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Xét $\triangle CMB$ Ta có $BA \perp CM$; $CD \perp BM$; $ME \perp BC$ như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.
4. Theo trên Ta có $\widehat{SM} = \widehat{EM} \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2 \Rightarrow DM$ là tia phân giác của góc ADE. (1)
5. Ta có $\angle MEC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow \angle MEB = 90^\circ$.

Tứ giác AMEB có $\angle MAB = 90^\circ$; $\angle MEB = 90^\circ \Rightarrow \angle MAB + \angle MEB = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn $\Rightarrow \angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle A_1 = \angle B_2$ (nội tiếp cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

TH2 (Hình b)

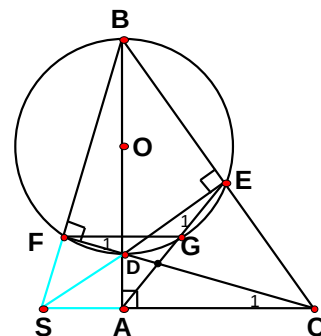
Câu 2 : $\angle ABC = \angle CME$ (cùng phụ $\angle ACB$); $\angle ABC = \angle CDS$ (cùng bù $\angle ADC$) $\Rightarrow \angle CME = \angle CDS$

$\Rightarrow \widehat{CE} = \widehat{CS} \Rightarrow \widehat{SM} = \widehat{EM} \Rightarrow \angle SCM = \angle ECM \Rightarrow CA$ là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16 Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :

1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp.
3. $AC \parallel FG$.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.



Lời giải:

1. Xét hai tam giác ABC và EBD Ta có $\angle BAC = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DEB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle DEB = \angle BAC = 90^\circ$; lại có $\angle ABC$ là góc chung $\Rightarrow \triangle DEB \sim \triangle CAB$.

2. Theo trên $\angle DEB = 90^\circ \Rightarrow \angle DEC = 90^\circ$ (vì hai góc kề bù); $\angle BAC = 90^\circ$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A) hay $\angle DAC = 90^\circ \Rightarrow \angle DEC + \angle DAC = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp.

* $\angle BAC = 90^\circ$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DFB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\angle BFC = 90^\circ$ như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90° nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC $\Rightarrow AFBC$ là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1 \Rightarrow \angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra $AC \parallel FG$.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B, C, H); từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

2. Chứng minh rằng $MP + MQ = AH$.

3. Chứng minh $OH \perp PQ$.

Lời giải:

1. Ta có $MP \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \angle APM = 90^\circ$; $MQ \perp AC$ (gt)

$\Rightarrow \angle AQM = 90^\circ$ như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng

90° nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM $\Rightarrow$

APMQ là tứ giác nội tiếp.

* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ

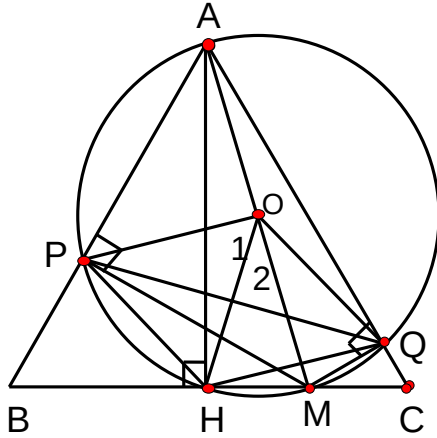
tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$.

Tam giác ABM có MP là đường cao $\Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MP$

Tam giác ACM có MQ là đường cao $\Rightarrow S_{ACM} =$

$\frac{1}{2} AC \cdot MQ$



Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB.MP + \frac{1}{2} AC.MQ = \frac{1}{2} BC.AH \Rightarrow AB.MP + AC.MQ = BC.AH$

Mà $AB = BC = CA$ (vì tam giác ABC đều) $\Rightarrow MP + MQ = AH$.

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác $\Rightarrow \angle HAP = \angle HAQ \Rightarrow \widehat{HP} = \widehat{HQ}$ (tính chất góc nội tiếp) $\Rightarrow \angle HOP = \angle HOQ$ (t/c góc ở tâm) $\Rightarrow OH$ là tia phân giác góc POQ . Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao $\Rightarrow OH \perp PQ$

Bài 18 Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H , lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D . Gọi I là giao điểm của AD và BC .

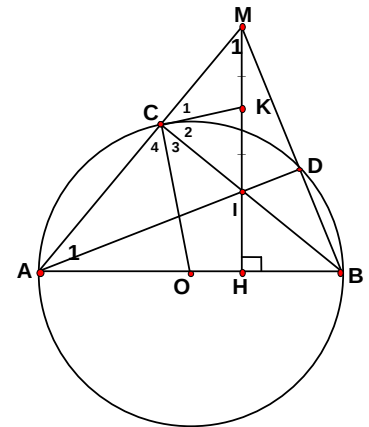
1. Chứng minh $MCID$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I .
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCID$, Chứng minh $KCOH$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:

1. Ta có: $\angle ACB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \angle MCI = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).
 $\angle ADB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \angle MDI = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù).
 $\Rightarrow \angle MCI + \angle MDI = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác $MCID$ nên $MCID$ là tứ giác nội tiếp.

2. Theo trên Ta có $BC \perp MA$; $AD \perp MB$ nên BC và AD là hai đường cao của tam giác MAB mà BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác MAB . Theo giả thiết thì $MH \perp AB$ nên MH cũng là đường cao của tam giác $MAB \Rightarrow AD, BC, MH$ đồng quy tại I .

3. $\triangle OAC$ cân tại O (vì OA và OC là bán kính) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle C_4$
 $\triangle KCM$ cân tại K (vì KC và KM là bán kính) $\Rightarrow \angle M_1 = \angle C_1$.
Mà $\angle A_1 + \angle M_1 = 90^\circ$ (do tam giác AHM vuông tại H) $\Rightarrow \angle C_1 + \angle C_4 = 90^\circ \Rightarrow \angle C_3 + \angle C_2 = 90^\circ$ (vì góc ACM là góc bẹt) hay $\angle OCK = 90^\circ$.
Xét tứ giác $KCOH$ Ta có $\angle OHK = 90^\circ$; $\angle OCK = 90^\circ \Rightarrow \angle OHK + \angle OCK = 180^\circ$ mà $\angle OHK$ và $\angle OCK$ là hai góc đối nên $KCOH$ là tứ giác nội tiếp.



Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AC . Trên bán kính OC lấy điểm B tùy ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB . Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB . Nối CD , Kẻ BI vuông góc với CD .

1. Chứng minh tứ giác $BMDI$ nội tiếp.

2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh $BI \parallel AD$.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O') .

Lời giải:

1. $\angle BIC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BID = 90^\circ$
(vì là hai góc kề bù); $DE \perp AB$ tại M $\Rightarrow \angle BMD = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle BID + \angle BMD = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID
nên MBID là tứ giác nội tiếp.

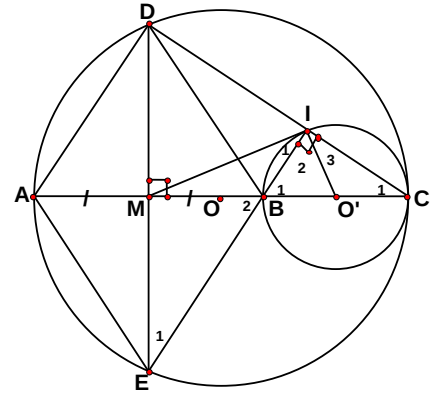
2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; $DE \perp AB$ tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)
 $\Rightarrow$ Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. $\angle ADC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AD \perp DC$; theo trên $BI \perp DC \Rightarrow BI \parallel AD$. (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi $\Rightarrow EB \parallel AD$ (2).

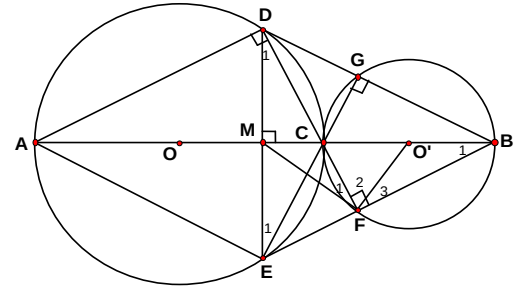
Từ (1) và (2) $\Rightarrow I, B, E$ thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I $\Rightarrow IM$ là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE)
 $\Rightarrow MI = ME \Rightarrow \triangle MIE$ cân tại M $\Rightarrow \angle I_1 = \angle E_1$; $\triangle O'IC$ cân tại O' (vì $O'C$ và $O'I$ cùng là bán kính)
 $\Rightarrow \angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) $\Rightarrow \angle I_1 = \angle I_3 \Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà
 $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^\circ \Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2 = 90^\circ = \angle MIO'$ hay $MI \perp O'I$ tại I $\Rightarrow MI$ là tiếp tuyến của (O') .



Bài 20. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ có $R > R'$ tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O') . DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp.
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. $MF = \frac{1}{2} DE$.
7. MF là tiếp tuyến của (O') .



Lời giải:

1. $\angle BGC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \angle CGD = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù)

Theo giả thiết $DE \perp AB$ tại M $\Rightarrow \angle CMD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CGD + \angle CMD = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

2. $\angle BFC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BFD = 90^\circ$; $\angle BMD = 90^\circ$ (vì $DE \perp AB$ tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90° nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính BD $\Rightarrow M, D, B, F$ cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; $DE \perp AB$ tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)
 $\Rightarrow$ Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

4. $\angle ADC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AD \perp DF$; theo trên tứ giác ADBE là hình thoi $\Rightarrow BE \parallel AD$ mà $AD \perp DF$ nên suy ra $BE \perp DF$.

Theo trên $\angle BFC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BF \perp DF$ mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đó B, E, F thẳng hàng.

5. Theo trên $DF \perp BE$; $BM \perp DE$ mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE $\Rightarrow EC$ cũng là đường cao $\Rightarrow EC \perp BD$; theo trên $CG \perp BD \Rightarrow E, C, G$ thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

6. Theo trên $DF \perp BE \Rightarrow \triangle DEF$ vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra

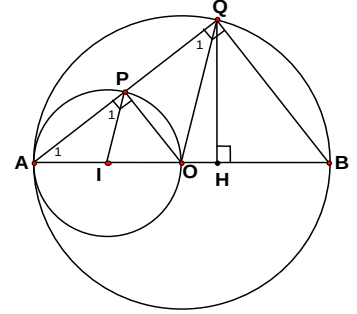
$MF = 1/2 DE$ (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. (HD) theo trên $MF = 1/2 DE \Rightarrow MD = MF \Rightarrow \Delta MDF$ cân tại M $\Rightarrow \angle D_1 = \angle F_1$

$\Delta O'BF$ cân tại O' (vì $O'B$ và $O'F$ cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với $\angle DEB$) $\Rightarrow \angle F_1 = \angle F_3 \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 = 90^\circ = \angle MFO'$ hay $MF \perp O'F$ tại F $\Rightarrow MF$ là tiếp tuyến của (O') .

Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA. Vẽ đường tròn tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.
2. Chứng minh $IP \parallel OQ$.
3. Chứng minh rằng $AP = PQ$.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.



Lời giải:

1. Ta có $OI = OA - IA$ mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đ/ tròn (O) và đường tròn (I). Vậy đ/ tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A.

2. ΔOAQ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle Q_1$

ΔIAP cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle P_1$

$\Rightarrow \angle P_1 = \angle Q_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra $IP \parallel OQ$.

3. $\angle APO = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow OP \perp AQ \Rightarrow OP$ là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến $\Rightarrow AP = PQ$.

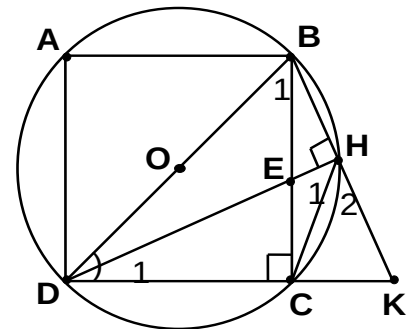
4. (HD) Kẻ $QH \perp AB$ ta có $S_{AQB} = \frac{1}{2} AB \cdot QH$. mà AB là đường kính không đổi nên S_{AQB} lớn nhất khi QH

lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB. Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.

Thật vậy P là trung điểm của cung AO $\Rightarrow PI \perp AO$ mà theo trên $PI \parallel QO \Rightarrow QO \perp AB$ tại O $\Rightarrow Q$ là trung điểm của cung AB và khi đó H trùng với O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

Bài 22. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp.
2. Tính góc CHK.
3. Chứng minh $KC \cdot KD = KH \cdot KB$
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?



Lời giải:

1. Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên $\angle BCD = 90^\circ$; $BH \perp DE$ tại H nên $\angle BHD = 90^\circ \Rightarrow$ như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90° nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD $\Rightarrow BHCD$ là tứ giác nội tiếp.

2. $BHCD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle BDC + \angle BHC = 180^\circ$. (1)

$\angle BHK$ là góc bẹt nên $\angle KHC + \angle BHC = 180^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle CHK = \angle BDC$ mà $\angle BDC = 45^\circ$ (vì ABCD là hình vuông) $\Rightarrow \angle CHK = 45^\circ$.

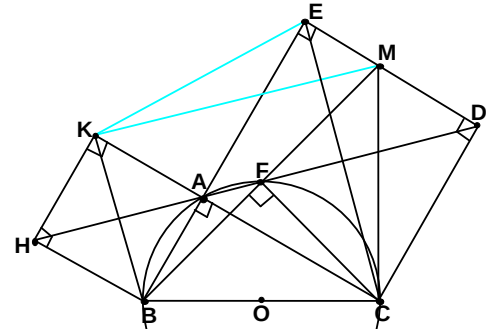
3. Xét ΔKHC và ΔKDB ta có $\angle CHK = \angle BDC = 45^\circ$; $\angle K$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta KHC \sim \Delta KDB \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{KH}{KD} \Rightarrow KC \cdot KD = KH \cdot KB$.

4. (HD) Ta luôn có $\angle BHD = 90^\circ$ và BD cố định nên khi E chuyển động trên cạnh BC cố định thì H chuyển động trên cung BC ($E \equiv B$ thì $H \equiv B$; $E \equiv C$ thì $H \equiv C$).

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết $\angle ABC > 45^\circ$; gọi M là giao điểm của BF và ED, Chứng minh 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Lời giải:

1. Theo giả thiết ABHK là hình vuông $\Rightarrow \angle BAH = 45^\circ$

Tứ giác AEDC là hình vuông $\Rightarrow \angle CAD = 45^\circ$; tam giác ABC vuông ở A $\Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle BAH + \angle BAC + \angle CAD = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ ba điểm H, A, D thẳng hàng.

2. Ta có $\angle BFC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F. (1).
 $\angle FBC = \angle FAC$ (nội tiếp cùng chắn cung FC) mà theo trên $\angle CAD = 45^\circ$ hay $\angle FAC = 45^\circ$ (2).
 Từ (1) và (2) suy ra $\triangle FBC$ là tam giác vuông cân tại F.

3. Theo trên $\angle BFC = 90^\circ \Rightarrow \angle CFM = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù); $\angle CDM = 90^\circ$ (t/c hình vuông).
 $\Rightarrow \angle CFM + \angle CDM = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác CDMF nội tiếp một đường tròn suy ra
 $\angle CDF = \angle CMF$, mà $\angle CDF = 45^\circ$ (vì AEDC là hình vuông) $\Rightarrow \angle CMF = 45^\circ$ hay $\angle CMB = 45^\circ$.

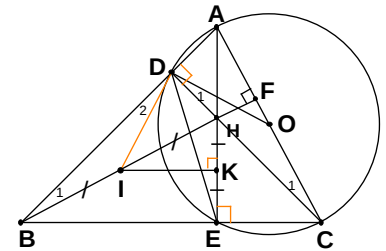
Ta cũng có $\angle CEB = 45^\circ$ (vì AEDC là hình vuông); $\angle BKC = 45^\circ$ (vì ABHK là hình vuông).

Như vậy K, E, M cùng nhìn BC dưới một góc bằng 45° nên cùng nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên BC $\Rightarrow$ 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.

4. $\triangle CBM$ có $\angle B = 45^\circ$; $\angle M = 45^\circ \Rightarrow \angle BCM = 45^\circ$ hay $MC \perp BC$ tại C $\Rightarrow$ MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có $\angle B = 45^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

1. Chứng minh $AE = EB$.
2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.
3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDE$.



Lời giải:

1. $\angle AEC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù); Theo giả thiết $\angle ABE = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle AEB$ là tam giác vuông cân tại E $\Rightarrow EA = EB$.

2. Gọi K là trung điểm của HE (1); I là trung điểm của HB $\Rightarrow IK$ là đường trung bình của tam giác HBE
 $\Rightarrow IK \parallel BE$ mà $\angle AEC = 90^\circ$ nên $BE \perp HE$ tại E $\Rightarrow IK \perp HE$ tại K (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IK$ là trung trực của HE. Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. theo trên I thuộc trung trực của HE $\Rightarrow IE = IH$ mà I là trung điểm của BH $\Rightarrow IE = IB$.

$\angle ADC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BDH = 90^\circ$ (kề bù $\angle ADC$) $\Rightarrow$ tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) $\Rightarrow ID = 1/2 BH$ hay $ID = IB \Rightarrow IE = IB = ID \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.

Ta có $\triangle ODC$ cân tại O (vì OD và OC là bán kính) $\Rightarrow \angle D_1 = \angle C_1$. (3)

$\triangle IBD$ cân tại I (vì ID và IB là bán kính) $\Rightarrow \angle D_2 = \angle B_1$. (4)

Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC $\Rightarrow BH$ cũng là đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow BH \perp AC$ tại F $\Rightarrow \triangle AEB$ có $\angle AFB = 90^\circ$.

Theo trên $\triangle ADC$ có $\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1$ (cùng phụ $\angle BAC$) (5).

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_2 + \angle IDH = \angle BDC = 90^\circ \Rightarrow \angle D_1 + \angle IDH = 90^\circ = \angle IDO \Rightarrow OD \perp ID$ tại D $\Rightarrow OD$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Bài 25. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì ($BC < 2R$). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân.
2. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp.
3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$.
4. Chứng minh $PQ \perp MI$.

Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

2. Theo giả thiết $MI \perp BC \Rightarrow \angle MIB = 90^\circ$; $MK \perp AB \Rightarrow \angle MKB = 90^\circ$.

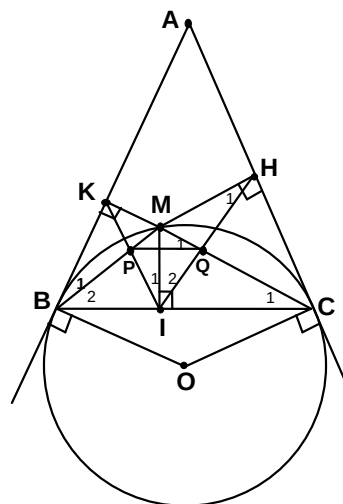
$\Rightarrow \angle MIB + \angle MKB = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối $\Rightarrow$ tứ giác BIMK nội tiếp

** (Chứng minh tứ giác CIMH nội tiếp tương tự tứ giác BIMK)*

3. Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp $\Rightarrow \angle KMI + \angle KBI = 180^\circ$; tứ giác CHMI nội tiếp $\Rightarrow \angle HMI + \angle HCI = 180^\circ$. mà $\angle KBI = \angle HCI$ (vì tam giác ABC cân tại A) $\Rightarrow \angle KMI = \angle HMI$ (1).

Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp $\Rightarrow \angle B_1 = \angle I_1$ (nội tiếp cùng chắn cung KM); tứ giác CHMI nội tiếp $\Rightarrow \angle H_1 = \angle C_1$ (nội tiếp cùng chắn cung IM). Mà $\angle B_1 = \angle C_1$ ($= 1/2$ số đo $\widehat{BM}$) $\Rightarrow \angle I_1 = \angle H_1$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKI \sim \Delta MIH \Rightarrow \frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI} \Rightarrow MI^2 = MH.MK$



4. Theo trên ta có $\angle I_1 = \angle C_1$; cũng chứng minh tương tự ta có $\angle I_2 = \angle B_2$ mà $\angle C_1 + \angle B_2 + \angle BMC = 180^\circ \Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2 + \angle BMC = 180^\circ$ hay $\angle PIQ + \angle PMQ = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối $\Rightarrow$ tứ giác PMQI nội tiếp $\Rightarrow \angle Q_1 = \angle I_1$ mà $\angle I_1 = \angle C_1 \Rightarrow \angle Q_1 = \angle C_1 \Rightarrow PQ \parallel BC$ (vì có hai góc đồng vị bằng nhau). Theo giả thiết $MI \perp BC$ nên suy ra $IM \perp PQ$.

Bài 26. Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Vẽ dây cung $CD \perp AB$ ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh:

1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$
2. AM là tia phân giác của $\angle CMD$.
3. Tứ giác OHCI nội tiếp

4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

Lời giải: 1. Theo giả thiết M là trung điểm của $\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{MC}$

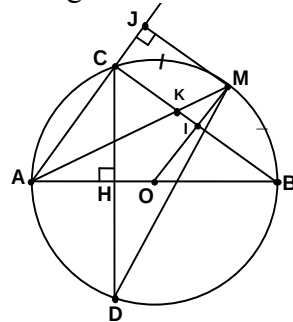
$\Rightarrow \angle CAM = \angle BAM$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow AK$ là tia phân giác của góc CAB $\Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ (t/c tia phân giác của tam giác)

2. (HD) Theo giả thiết $CD \perp AB \Rightarrow A$ là trung điểm của $\widehat{CD} \Rightarrow \angle CMA = \angle DMA \Rightarrow MA$ là tia phân giác của góc CMD.

3. (HD) Theo giả thiết M là trung điểm của $\widehat{BC} \Rightarrow OM \perp BC$ tại I $\Rightarrow \angle OIC = 90^\circ$; $CD \perp AB$ tại H $\Rightarrow \angle OHC = 90^\circ \Rightarrow \angle OIC + \angle OHC = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối $\Rightarrow$ tứ giác OHCI nội tiếp

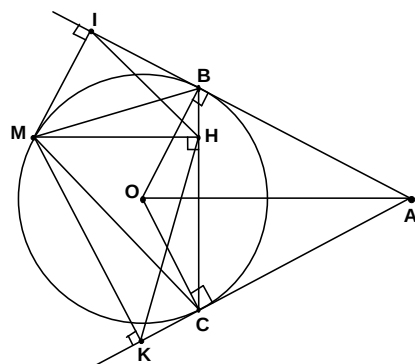
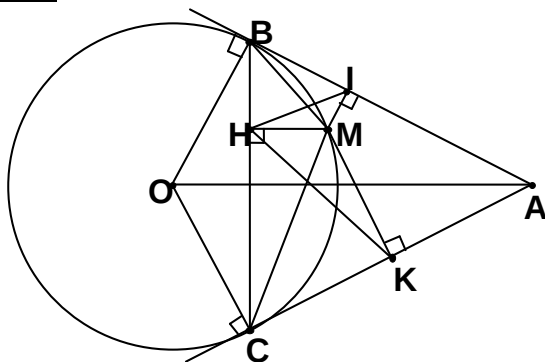
4. Kẻ $MJ \perp AC$ ta có $MJ \parallel BC$ (vì cùng vuông góc với AC). Theo trên $OM \perp BC \Rightarrow OM \perp MJ$ tại J suy ra MJ là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

Bài 27 Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) tại B và C. Gọi M là điểm tùy ý trên đường tròn (M khác B, C), từ M kẻ $MH \perp BC$, $MK \perp CA$, $MI \perp AB$. Chứng minh:



1. Tứ giác ABOC nội tiếp. 2. $\angle BAO = \angle BCO$. 3. $\triangle MIH \sim \triangle MHK$. 4. $MI.MK = MH^2$.

Lời giải:



1. (HS tự giải)

2. Tứ giác ABOC nội tiếp $\Rightarrow \angle BAO = \angle BCO$ (nội tiếp cùng chắn cung BO).

3. Theo giả thiết $MH \perp BC \Rightarrow \angle MHC = 90^\circ$; $MK \perp CA \Rightarrow \angle MKC = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle MHC + \angle MKC = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối $\Rightarrow$ tứ giác MHCK nội tiếp $\Rightarrow \angle HCM = \angle HKM$ (nội tiếp cùng chắn cung HM).

Chúng minh tương tự ta có tứ giác MHBI nội tiếp $\Rightarrow \angle MHI = \angle MBI$ (nội tiếp cùng chắn cung IM).

Mà $\angle HCM = \angle MBI (= 1/2 \text{ số đo } \widehat{BM}) \Rightarrow \angle HKM = \angle MHI$ (1). Chúng minh tương tự ta cũng có $\angle KHM = \angle HIM$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle HIM \sim \triangle KHM$.

4. Theo trên $\triangle HIM \sim \triangle KHM \Rightarrow \frac{MI}{MH} = \frac{MH}{MK} \Rightarrow MI.MK = MH^2$

Bài 28 Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1. Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành.
2. E, F nằm trên đường tròn (O).
3. Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.
4. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải:

1. Theo giả thiết F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC $\Rightarrow I$ là trung điểm BC và $HE \Rightarrow BHCF$ là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

2. (HD) Tứ giác AB'HC' nội tiếp $\Rightarrow \angle BAC + \angle B'HC' = 180^\circ$ mà $\angle BHC = \angle B'HC'$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle BAC + \angle BHC = 180^\circ$. Theo trên BHCF là hình bình hành $\Rightarrow \angle BHC = \angle BFC \Rightarrow \angle BFC + \angle BAC = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác ABFC nội tiếp $\Rightarrow F$ thuộc (O).

* H và E đối xứng nhau qua BC $\Rightarrow \triangle BHC = \triangle BEC$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle BHC = \angle BEC \Rightarrow \angle BEC + \angle BAC = 180^\circ \Rightarrow ABEC$ nội tiếp $\Rightarrow E$ thuộc (O).

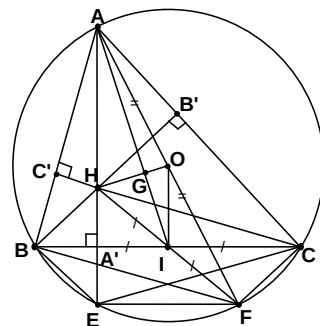
3. Ta có H và E đối xứng nhau qua BC $\Rightarrow BC \perp HE$ (1) và $IH = IE$ mà I là trung điểm của của HF $\Rightarrow EI = 1/2 HE \Rightarrow$ tam giác HEF vuông tại E hay $FE \perp HE$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF \parallel BC \Rightarrow BEFC$ là hình thang. (3)

Theo trên $E \in (O) \Rightarrow \angle CBE = \angle CAE$ (nội tiếp cùng chắn cung CE) (4).

Theo trên $F \in (O)$ và $\angle FEA = 90^\circ \Rightarrow AF$ là đường kính của (O) $\Rightarrow \angle ACF = 90^\circ \Rightarrow \angle BCF = \angle CAE$ (vì cùng phụ $\angle ACB$) (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \angle BCF = \angle CBE$ (6).

Từ (3) và (6) $\Rightarrow$ tứ giác BEFC là hình thang cân.



4. Theo trên AF là đường kính của (O) $\Rightarrow$ O là trung điểm của AF; BHCF là hình bình hành $\Rightarrow$ I là trung điểm của HF $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của tam giác AHF $\Rightarrow$ OI = 1/2 AH.

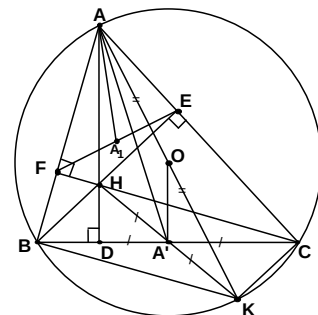
Theo giả thiết I là trung điểm của BC $\Rightarrow$ OI $\perp$ BC (Quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \angle OIG = \angle HAG$ (vì so le trong); lại có $\angle OGI = \angle HGA$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle OGI \sim \triangle HGA \Rightarrow \frac{GI}{GA} = \frac{OI}{HA}$ mà OI = $\frac{1}{2}$ AH

AH

$\Rightarrow \frac{GI}{GA} = \frac{1}{2}$ mà AI là trung tuyến của $\triangle ABC$ (do I là trung điểm của BC) $\Rightarrow$ G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Bài 29 BC là một dây cung của đường tròn (O; R) ($BC \neq 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

1. Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.
2. Gọi A' là trung điểm của BC, Chứng minh $AH = 2OA'$.
3. Gọi A₁ là trung điểm của EF, Chứng minh $RAA_1 = AA' \cdot OA'$.
4. Chứng minh $R(EF + FD + DE) = 2S_{ABC}$ suy ra vị trí của A để tổng EF + FD + DE đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải: (HD)

1. Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow \angle AEF = \angle ACB$ (cùng bù $\angle BFE$)
 $\angle AEF = \angle ABC$ (cùng bù $\angle CEF$) $\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$.
2. Vẽ đường kính AK $\Rightarrow KB \parallel CH$ (cùng vuông góc AB); $KC \parallel BH$ (cùng vuông góc AC) $\Rightarrow BHKC$ là hình bình hành $\Rightarrow A'$ là trung điểm của HK
 $\Rightarrow OK$ là đường trung bình của $\triangle AHK \Rightarrow AH = 2OA'$
3. Áp dụng tính chất: nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số giữa hai trung tuyến, tỉ số giữa hai bán kính các đường tròn ngoại tiếp bằng tỉ số đồng dạng. ta có:

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{AA'}{AA_1} \quad (1) \text{ trong đó } R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp } \triangle ABC; R' \text{ là bán kính}$$

đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$; AA' là trung tuyến của $\triangle ABC$; AA_1 là trung tuyến của $\triangle AEF$.

Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH nên đây cũng là đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow R \cdot AA_1 = AA' \cdot R' = AA' \cdot \frac{AH}{2} = AA' \cdot \frac{2A'O}{2}$$

$$\text{Vậy } R \cdot AA_1 = AA' \cdot A'O \quad (2)$$

4. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AC, AB, ta có $OB' \perp AC$; $OC' \perp AB$ (bán kính đi qua trung điểm của một dây không qua tâm) $\Rightarrow OA'$, OB' , OC' lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OCA, OAB.

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2} (OA' \cdot BC + OB' \cdot AC + OC' \cdot AB)$$

$$2S_{ABC} = OA' \cdot BC + OB' \cdot AC + OC' \cdot AB \quad (3)$$

Theo (2) $\Rightarrow OA' = R \cdot \frac{AA_1}{AA'}$ mà $\frac{AA_1}{AA'}$ là tỉ số giữa 2 trung tuyến của hai tam giác đồng dạng AEF và ABC

nên $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{EF}{BC}$. Tương tự ta có: $OB' = R \cdot \frac{FD}{AC}$; $OC' = R \cdot \frac{ED}{AB}$ Thay vào (3) ta được

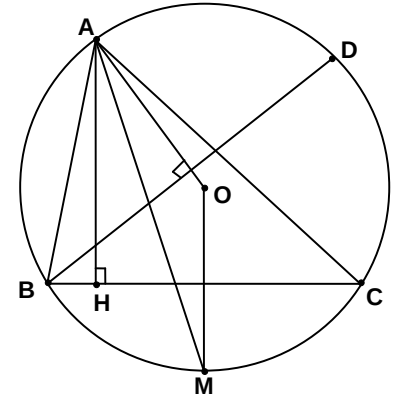
$$2S_{ABC} = R \left(\frac{EF}{BC} \cdot BC + \frac{FD}{AC} \cdot AC + \frac{ED}{AB} \cdot AB \right) \Leftrightarrow 2S_{ABC} = R(EF + FD + DE)$$

* $R(EF + FD + DE) = 2S_{ABC}$ mà R không đổi nên $(EF + FD + DE)$ đạt giá trị lớn nhất khi S_{ABC} .

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$ do BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Bài 30 Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính OA.

1. Chứng minh AM là phân giác của góc OAH.
2. Giả sử $\angle B > \angle C$. Chứng minh $\angle OAH = \angle B - \angle C$.
3. Cho $\angle BAC = 60^\circ$ và $\angle OAH = 20^\circ$. Tính:
 - a) $\angle B$ và $\angle C$ của tam giác ABC.
 - b) Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC theo R



Lời giải: (HD)

1. AM là phân giác của $\angle BAC \Rightarrow \angle BAM = \angle CAM \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{CM} \Rightarrow M$ là trung điểm của cung BC $\Rightarrow OM \perp BC$; Theo giả thiết $AH \perp BC \Rightarrow OM \parallel AH \Rightarrow \angle HAM = \angle OMA$ (so le). Mà $\angle OMA = \angle OAM$ (vì tam giác OAM cân tại O do có $OM = OA = R$) $\Rightarrow \angle HAM = \angle OAM \Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc OAH.

2. Vẽ dây BD $\perp OA \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AD} \Rightarrow \angle ABD = \angle ACB$.

Ta có $\angle OAH = \angle DBC$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn) $\Rightarrow \angle OAH = \angle ABC - \angle ABD \Rightarrow \angle OAH = \angle ABC - \angle ACB$ hay $\angle OAH = \angle B - \angle C$.

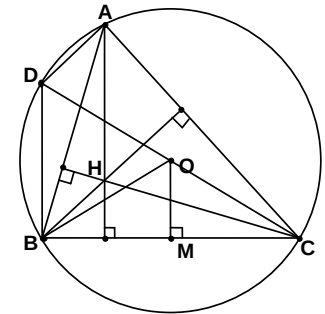
3. a) Theo giả thiết $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = 120^\circ$; theo trên $\angle B - \angle C = \angle OAH \Rightarrow \angle B - \angle C = 20^\circ$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle B + \angle C = 120^\circ \\ \angle B - \angle C = 20^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle B = 70^\circ \\ \angle C = 50^\circ \end{cases}$$

$$b) S_{vp} = S_{qBOC} - S_{\Delta BOC} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi \cdot R^2}{3} - \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Bài 31 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O; R), biết $\angle BAC = 60^\circ$.

1. Tính số đo góc BOC và độ dài BC theo R.
2. Vẽ đường kính CD của (O; R); gọi H là giao điểm của ba đường cao của tam giác ABC. Chứng minh $BD \parallel AH$ và $AD \parallel BH$.
3. Tính AH theo R.



Lời giải:

1. Theo giả thiết $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow sđ \widehat{BC} = 120^\circ$ (t/c góc nội tiếp) $\Rightarrow \angle BOC = 120^\circ$ (t/c góc ở tâm).

* Theo trên $sđ \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow BC$ là cạnh của một tam giác đều nội tiếp (O; R) $\Rightarrow BC = R\sqrt{3}$.

2. CD là đường kính $\Rightarrow \angle DBC = 90^\circ$ hay $DB \perp BC$; theo giả thiết AH là đường cao $\Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow BD \parallel AH$. Chứng minh tương tự ta cũng được $AD \parallel BH$.

3. Theo trên $\angle DBC = 90^\circ \Rightarrow \Delta DBC$ vuông tại B có $BC = R\sqrt{3}$; $CD = 2R$.

$$\Rightarrow BD^2 = CD^2 - BC^2 \Rightarrow BD^2 = (2R)^2 - (R\sqrt{3})^2 = 4R^2 - 3R^2 = R^2 \Rightarrow BD = R.$$

Theo trên $BD \parallel AH$; $AD \parallel BH \Rightarrow BDAH$ là hình bình hành $\Rightarrow AH = BD \Rightarrow AH = R$.

Bài 32 Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB.

1. Chứng minh khi MN di động, trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.
2. Từ A kẻ $Ax \perp MN$, tia BI cắt Ax tại C. Chứng minh tứ giác CMBN là hình bình hành.
3. Chứng minh C là trực tâm của tam giác AMN.

4. Khi MN quay quanh H thì C di động trên đường nào.
Cho $AM \cdot AN = 3R^2$, $AN = R\sqrt{3}$.
Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác AMN.

3. (HD) $\angle MAN = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle P_1 = 90^\circ - \angle K_1$ mà $\angle K_1$ là góc ngoài của tam giác AKB nên $\angle K_1 = \angle A_1 + \angle B_1 = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$ (t/c phân giác của một góc) $\Rightarrow \angle P_1 = 90^\circ - (\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2})$. (1)

CQ là tia phân giác của góc ACB $\Rightarrow \angle C_1 = \frac{\angle C}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A - \angle B) = 90^\circ - (\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2})$. (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle P_1 = \angle C_1$ hay $\angle QPB = \angle QCB$ mà P và C nằm cùng về một nửa mặt phẳng bờ BQ nên cùng nằm trên cung chứa góc $90^\circ - (\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2})$ dựng trên BQ.

Vậy bốn điểm P, C, B, Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài 34 Cho tam giác ABC cân (AB = AC), BC = 6 Cm, chiều cao AH = 4 Cm, nội tiếp đường tròn (O) đường kính AA'.

1. Tính bán kính của đường tròn (O).
2. Kẻ đường kính CC', tứ giác CAC'A' là hình gì? Tại sao?
3. Kẻ $AK \perp CC'$ tứ giác AKHC là hình gì? Tại sao?
4. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác ABC.

Lời giải:

1. (HD) Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH xuất phát từ đỉnh A trùng nhau, tức là AA' đi qua H. $\Rightarrow \triangle ACA'$ vuông tại C có đường cao CH = $\frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm; AH =

$$4\text{cm} \Rightarrow CH^2 = AH \cdot A'H \Rightarrow A'H = \frac{CH^2}{AH} = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4} = 2,5 \Rightarrow AA' =$$

$$4\text{cm} \Rightarrow CH^2 = AH \cdot A'H \Rightarrow A'H = \frac{CH^2}{AH} = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4} = 2,5 \Rightarrow AA' =$$

$$\Rightarrow AA' = AH + HA' = 4 + 2,5 = 6,5 \text{ (cm)} \Rightarrow R = AA' : 2 = 6,5 : 2 = 3,25 \text{ (cm)}.$$

2. Vì AA' và CC' là hai đường kính nên cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường $\Rightarrow ACA'C'$ là hình bình hành. Lại có $\angle ACA' = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên suy ra tứ giác ACA'C' là hình chữ nhật.

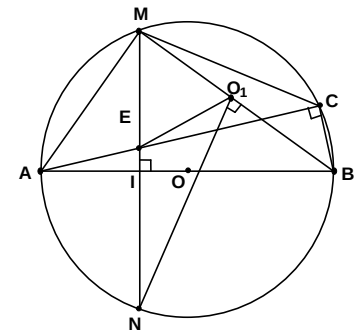
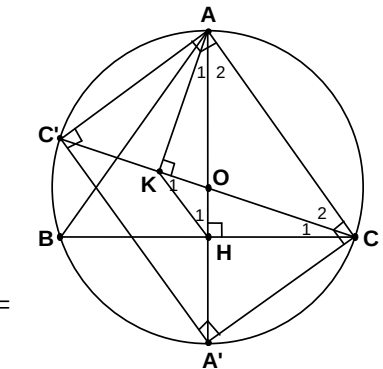
3. Theo giả thiết $AH \perp BC$; $AK \perp CC' \Rightarrow K$ và H cùng nhìn AC dưới một góc bằng 90° nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AC hay tứ giác ACHK nội tiếp (1) $\Rightarrow \angle C_2 = \angle H_1$ (nội tiếp cùng chắn cung AK); $\triangle AOC$ cân tại O (vì $OA = OC = R$) $\Rightarrow \angle C_2 = \angle A_2 \Rightarrow \angle A_2 = \angle H_1 \Rightarrow HK \parallel AC$ (vì có hai góc so le trong bằng nhau) $\Rightarrow$ tứ giác ACHK là hình thang (2). Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ACHK là hình thang cân.

Bài 35 Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

1. Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp.
2. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.
3. Chứng minh $AM^2 = AE \cdot AC$.
4. Chứng minh $AE \cdot AC - AI \cdot IB = AI^2$.
5. Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Lời giải:

1. Theo giả thiết $MN \perp AB$ tại I $\Rightarrow \angle EIB = 90^\circ$; $\angle ACB$ nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^\circ$ hay $\angle ECB = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle EIB + \angle ECB = 180^\circ$ mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp.



2. Theo giả thiết $MN \perp AB \Rightarrow A$ là trung điểm của cung $MN \Rightarrow \angle AMN = \angle ACM$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay $\angle AME = \angle ACM$. Lại thấy $\angle CAM$ là góc chung của hai tam giác AME và AMC do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM .

3. Theo trên $\triangle AME \sim \triangle ACM \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE \cdot AC$

4. $\angle AMB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn); $MN \perp AB$ tại $I \Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M có MI là đường cao $\Rightarrow MI^2 = AI \cdot BI$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông).

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác AIM vuông tại I ta có $AI^2 = AM^2 - MI^2 \Rightarrow AI^2 = AE \cdot AC - AI \cdot BI$.

5. Theo trên $\angle AMN = \angle ACM \Rightarrow AM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECM$; Nối MB ta có $\angle AMB = 90^\circ$, do đó tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECM$ phải nằm trên BM . Ta thấy NO_1 nhỏ nhất khi NO_1 là khoảng cách từ N đến $BM \Rightarrow NO_1 \perp BM$.

Gọi O_1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECM$ có bán kính là O_1M . Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn tâm O_1 bán kính O_1M với đường tròn (O) trong đó O_1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM .

Bài 36 Cho tam giác nhọn ABC , Kẻ các đường cao AD, BE, CF . Gọi H là trực tâm của tam giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các hình chiếu vuông góc của D lên AB, BE, CF, AC . Chứng minh:

1. Các tứ giác $DMFP, DNEQ$ là hình chữ nhật.
2. Các tứ giác $BMND, DNHP, DPQC$ nội tiếp.
3. Hai tam giác HNP và HCB đồng dạng.
4. Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Lời giải: 1. & 2. (HS tự làm)

3. Theo chứng minh trên $DNHP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle N_2 = \angle D_4$ (nội tiếp cùng chắn cung HP); $\triangle HDC$ có $\angle HDC = 90^\circ$ (do AH là đường cao) $\triangle HDP$ có $\angle HPD = 90^\circ$ (do $DP \perp HC$) $\Rightarrow \angle C_1 = \angle D_4$ (cùng phụ với $\angle DHC$) $\Rightarrow \angle C_1 = \angle N_2$ (1) chứng minh tương tự ta có $\angle B_1 = \angle P_1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle HNP \sim \triangle HCB$

4. Theo chứng minh trên $DNMB$ nội tiếp $\Rightarrow \angle N_1 = \angle D_1$ (nội tiếp cùng chắn cung BM). (3)

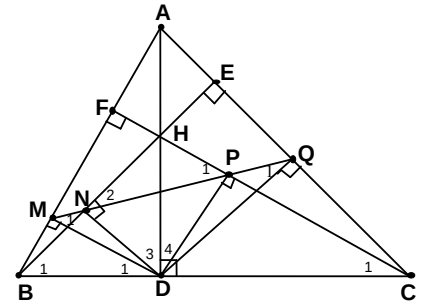
$DM \parallel CF$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \angle C_1 = \angle D_1$ (hai góc đồng vị). (4)

Theo chứng minh trên $\angle C_1 = \angle N_2$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \angle N_1 = \angle N_2$ mà B, N, H thẳng hàng $\Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng. (6)

Chứng minh tương tự ta cũng có N, P, Q thẳng hàng. (7)

Từ (6), (7) $\Rightarrow$ Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng



Bài 37 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài $BC, B \in (O), C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I .

1. Chứng minh các tứ giác $OBIA, AICO'$ nội tiếp.
2. Chứng minh $\angle BAC = 90^\circ$.
3. Tính số đo góc OIO' .
4. Tính độ dài BC biết $OA = 9\text{cm}, O'A = 4\text{cm}$.

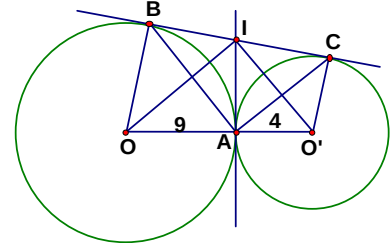
Lời giải:

1. (HS tự làm)

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $IB = IA, IA = IC$

$\triangle ABC$ có $AI = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A hay $\angle BAC = 90^\circ$

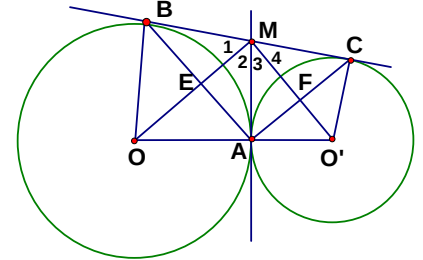
3. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IO là tia phân giác $\angle BIA$; IO' là tia phân giác $\angle CIA$. mà hai góc BIA và CIA là hai góc kề bù $\Rightarrow IO \perp IO' \Rightarrow \angle OIO' = 90^\circ$



4. Theo trên ta có $\triangle OIO'$ vuông tại I có IA là đường cao (do AI là tiếp tuyến chung nên $AI \perp OO'$)
 $\Rightarrow IA^2 = AO \cdot AO' = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow IA = 6 \Rightarrow BC = 2 \cdot IA = 2 \cdot 6 = 12(\text{cm})$

Bài 38 Cho hai đường tròn (O); (O') tiếp xúc ngoài tại A, BC là tiếp tuyến chung ngoài, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cả tiếp tuyến chung ngoài BC ở M. Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của O'M và AC. Chứng minh:

1. Chứng minh các tứ giác OBMA, AMCO' nội tiếp.
2. Tứ giác AEMF là hình chữ nhật.
3. $ME \cdot MO = MF \cdot MO'$.
4. OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.
5. BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO' .



Lời giải:

1. (HS tự làm)

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $MA = MB$

$\Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M. Lại có ME là tia phân giác $\Rightarrow ME \perp AB$ (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có $MF \perp AC$ (2).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta cũng có MO và MO' là tia phân giác của hai góc kề bù BMA và CMA $\Rightarrow MO \perp MO'$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác MEAF là hình chữ nhật

3. Theo giả thiết AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $\Rightarrow MA \perp OO' \Rightarrow \triangle MAO$ vuông tại A có $AE \perp MO$ (theo trên $ME \perp AB$) $\Rightarrow MA^2 = ME \cdot MO$ (4)

Tương tự ta có tam giác vuông MAO' có $AF \perp MO' \Rightarrow MA^2 = MF \cdot MO'$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow ME \cdot MO = MF \cdot MO'$

4. Đường tròn đường kính BC có tâm là M vì theo trên $MB = MC = MA$, đường tròn này đi qua A và có MA là bán kính. Theo trên $OO' \perp MA$ tại A $\Rightarrow OO'$ là tiếp tuyến tại A của đường tròn đường kính BC.

5. (HD) Gọi I là trung điểm của OO' ta có IM là đường trung bình của hình thang BCO'O

$\Rightarrow IM \perp BC$ tại M (*). Ta cũng chứng minh được $\angle OMO'$ vuông nên M thuộc đường tròn đường kính OO' $\Rightarrow IM$ là bán kính đường tròn đường kính OO' (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'

Bài 39 Cho đường tròn (O) đường kính BC, dây AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

1. Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).
2. Tứ giác AEHF là hình gì? Vì sao?
3. Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
5. Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.

Lời giải:

1.(HD) $OI = OB - IB \Rightarrow (I)$ tiếp xúc (O)

$OK = OC - KC \Rightarrow (K)$ tiếp xúc (O)

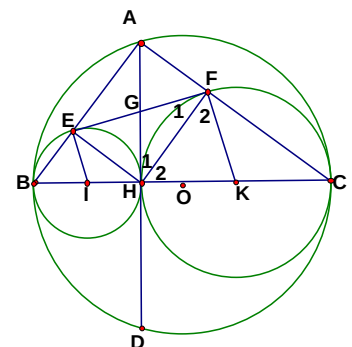
$IK = IH + KH \Rightarrow (I)$ tiếp xúc (K)

2. Ta có: $\angle BEH = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle AEH = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle CFH = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle AFH = 90^\circ$ (vì là hai góc kề bù). (2)



$\angle BAC = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn hay $\angle EAF = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

3. Theo giả thiết $AD \perp BC$ tại H nên $\triangle AHB$ vuông tại H có $HE \perp AB$ ($\angle BEH = 90^\circ$) $\Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB$ (*)

Tam giác AHC vuông tại H có $HF \perp AC$ (theo trên $\angle CFH = 90^\circ$) $\Rightarrow AH^2 = AF \cdot AC$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$ ($= AH^2$)

4. Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật, gọi G là giao điểm của hai đường chéo AH và EF ta có $GF = GH$ (tính chất đường chéo hình chữ nhật) $\Rightarrow \triangle GFH$ cân tại G $\Rightarrow \angle F_1 = \angle H_1$.

$\triangle KFH$ cân tại K (vì có KF và KH cùng là bán kính) $\Rightarrow \angle F_2 = \angle H_2$.

$\Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 = \angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 = \angle KFE = 90^\circ \Rightarrow KF \perp EF$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $IE \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

e) Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật $\Rightarrow EF = AH \leq OA$ (OA là bán kính đường tròn (O) có độ dài không đổi) nên $EF = OA \Leftrightarrow AH = OA \Leftrightarrow H$ trùng với O.

Vậy khi H trùng với O tức là dây AD vuông góc với BC tại O thì EF có độ dài lớn nhất.

Bài 40 Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Trên Ax lấy điểm M rồi kẻ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

1. Chứng minh tam giác MON đồng dạng với tam giác APB.

2. Chứng minh $AM \cdot BN = R^2$.

3. Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \frac{R}{2}$.

4. Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh cạnh AB sinh ra.

Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OM là tia phân giác của góc AOP; ON là tia phân giác của góc BOP, mà

$\angle AOP$ và $\angle BOP$ là hai góc kề bù $\Rightarrow \angle MON = 90^\circ$. hay tam giác MON vuông tại O.

$\angle APB = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay tam giác APB vuông tại P.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $NB \perp OB \Rightarrow \angle OBN = 90^\circ$; $NP \perp OP \Rightarrow \angle OPN = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle OBN + \angle OPN = 180^\circ$ mà $\angle OBN$ và $\angle OPN$ là hai góc đối $\Rightarrow$ tứ giác OBNP nội tiếp $\Rightarrow \angle OBP = \angle PNO$

Xét hai tam giác vuông APB và MON có $\angle APB = \angle MON = 90^\circ$; $\angle OBP = \angle PNO \Rightarrow \triangle APB \sim \triangle MON$

2. Theo trên $\triangle MON$ vuông tại O có $OP \perp MN$ (OP là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OP^2 = PM \cdot PN$

Mà $OP = R$; $AM = PM$; $BN = NP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow AM \cdot BN = R^2$

3. Theo trên $OP^2 = PM \cdot PN$ hay $PM \cdot PN = R^2$ mà $PM = AM = \frac{R}{2} \Rightarrow PN = \frac{R^2}{\frac{R}{2}} = 2R$

$\Rightarrow MN = MP + NP = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5R}{2}$ Theo trên $\triangle APB \sim \triangle MON \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{5R}{2} : 2R = \frac{5}{4} = k$ (k là tỉ số

đồng dạng). Vì tỉ số diện tích giữa hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên ta có:

$$\frac{S_{MON}}{S_{APB}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

Bài 41 Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $\angle DOE = 60^\circ$.

1) Chứng minh tích BD. CE không đổi.

2) Chứng minh hai tam giác BOD; OED đồng dạng. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE

3) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng

minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

Lời giải:

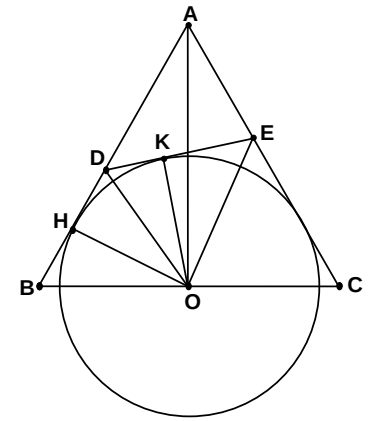
1. Tam giác ABC đều $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ (1);
 $\angle DOE = 60^\circ$ (gt) $\Rightarrow \angle DOB + \angle EOC = 120^\circ$ (2).

$\triangle BOD$ có $\angle DOB = 60^\circ \Rightarrow \angle BDO + \angle BOD = 120^\circ$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \angle BDO = \angle COE$ (4)

Từ (2) và (4) $\Rightarrow \triangle BOD \sim \triangle CEO \Rightarrow \frac{BD}{CO} = \frac{BO}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE =$

$BO \cdot CO$ mà $OB = OC = R$ không đổi $\Rightarrow BD \cdot CE = R^2$ không đổi.



2. Theo trên $\triangle BOD \sim \triangle CEO \Rightarrow \frac{BD}{CO} = \frac{OD}{OE}$ mà $CO = BO \Rightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{OD}{OE} \Rightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{BO}{OD}$ (5)

Lại có $\angle DBO = \angle DOE = 60^\circ$ (6).

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \triangle BOD \sim \triangle DOE \Rightarrow \angle BDO = \angle ODE \Rightarrow DO$ là tia phân giác $\angle BDE$.

3. Theo trên DO là tia phân giác $\angle BDE \Rightarrow O$ cách đều DB và $DE \Rightarrow O$ là tâm đường tròn tiếp xúc với DB và DE . Vậy đường tròn tâm O tiếp xúc với AB luôn tiếp xúc với DE

Bài 42 Cho tam giác ABC cân tại A, có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C lần lượt cắt AC, AB ở D và E. Chứng minh :

1. $BD^2 = AD \cdot CD$.

2. Tứ giác BCDE nội tiếp.

3. BC song song với DE.

Lời giải:

1. Xét hai tam giác BCD và ABD ta có $\angle CBD = \angle BAD$ (Vì là góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với một dây cùng chắn một

cung), lại có $\angle D$ chung $\Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD^2$

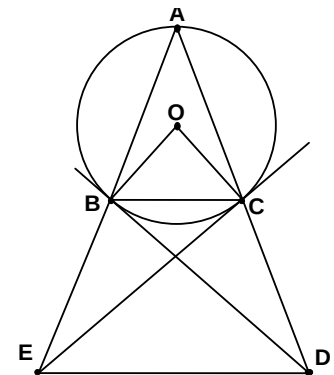
$= AD \cdot CD$.

2. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$

$\Rightarrow \angle EBC = \angle DCB$ mà $\angle CBD = \angle BCD$ (góc giữa tiếp tuyến với một dây cùng chắn một cung) $\Rightarrow \angle EBD = \angle DCE \Rightarrow B$ và C nhìn DE dưới cùng

một góc do đó B và C cùng nằm trên cung tròn dựng trên $DE \Rightarrow$ Tứ giác BCDE nội tiếp

3. Tứ giác BCDE nội tiếp $\Rightarrow \angle BCE = \angle BDE$ (nội tiếp cùng chắn cung BE) mà $\angle BCE = \angle CBD$ (theo trên) $\Rightarrow \angle CBD = \angle BDE$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra $BC \parallel DE$.



Bài 43 Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M, BN cắt (O) tại C. Gọi E là giao điểm của AC và BM.

1. Chứng minh tứ giác MNCE nội tiếp.

2. Chứng minh $NE \perp AB$.

3. Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh FA là tiếp tuyến của (O).

4. Chứng minh FN là tiếp tuyến của đường tròn (B; BA).

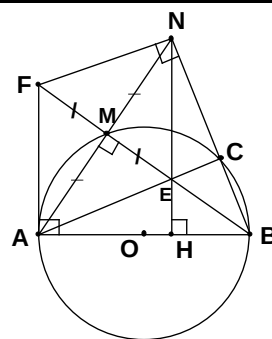
Lời giải: 1. (HS tự làm)

2. (HD) Dễ thấy E là trực tâm của tam giác NAB $\Rightarrow NE \perp AB$.

3. Theo giả thiết A và N đối xứng nhau qua M nên M là trung điểm của AN; F và E xứng nhau qua M nên M là trung điểm của EF $\Rightarrow$ AENF là hình bình hành $\Rightarrow FA \parallel NE$ mà $NE \perp AB$

$\Rightarrow FA \perp AB$ tại A $\Rightarrow FA$ là tiếp tuyến của (O) tại A.

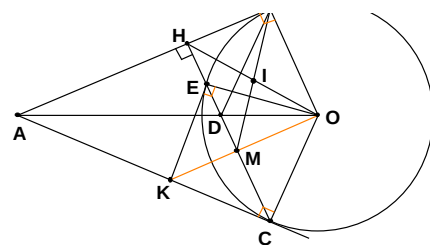
4. Theo trên tứ giác AENF là hình bình hành $\Rightarrow FN \parallel AE$ hay $FN \parallel AC$ mà $AC \perp BN \Rightarrow FN \perp BN$ tại N



$\triangle BAN$ có BM là đường cao đồng thời là đường trung tuyến (do M là trung điểm của AN) nên $\triangle BAN$ cân tại B $\Rightarrow BA = BN \Rightarrow BN$ là bán kính của đường tròn (B; BA) $\Rightarrow FN$ là tiếp tuyến tại N của (B; BA).

Bài 44 AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính R (B, C là tiếp điểm). Vẽ CH vuông góc AB tại H, cắt (O) tại E và cắt OA tại D.

1. Chứng minh $CO = CD$.
2. Chứng minh tứ giác OBCD là hình thoi.
3. Gọi M là trung điểm của CE, Bm cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.
4. Tiếp tuyến tại E với (O) cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm O, M, K thẳng hàng.



Lời giải:

1. Theo giả thiết AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O $\Rightarrow$

OA là tia phân giác của $\angle BOC \Rightarrow \angle BOA = \angle COA$ (1)

$OB \perp AB$ (AB là tiếp tuyến); $CH \perp AB$ (gt) $\Rightarrow OB \parallel CH \Rightarrow \angle BOA = \angle CDO$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle COD$ cân tại C $\Rightarrow CO = CD$ (3)

2. theo trên ta có $CO = CD$ mà $CO = BO (= R) \Rightarrow CD = BO$ (4) lại có $OB \parallel CH$ hay $OB \parallel CD$ (5)

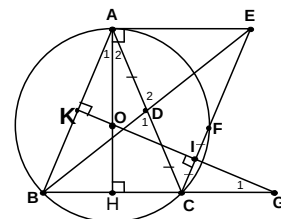
Từ (4) và (5) $\Rightarrow BOCD$ là hình bình hành (6). Từ (6) và (3) $\Rightarrow BOCD$ là hình thoi.

3. M là trung điểm của CE $\Rightarrow OM \perp CE$ (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \angle OMH = 90^\circ$. theo trên ta cũng có $\angle OBH = 90^\circ$; $\angle BHM = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác OBHM là hình chữ nhật $\Rightarrow I$ là trung điểm của OH.

4. M là trung điểm của CE; KE và KC là hai tiếp tuyến $\Rightarrow O, M, K$ thẳng hàng.

Bài 45 Cho tam giác cân ABC (AB = AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E. Tia CE cắt (O) tại F.

1. Chứng minh $BC \parallel AE$.
2. Chứng minh ABCE là hình bình hành.
3. Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của BC và OI.
So sánh $\angle BAC$ và $\angle BGO$.



Lời giải: 1. (HS tự làm)

2). Xét hai tam giác ADE và CDB ta có $\angle EAD = \angle BCD$ (vì so le trong)

$AD = CD$ (gt); $\angle ADE = \angle CDB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CDB \Rightarrow AE = CB$ (1)

Theo trên $AE \parallel CB$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow ABCE$ là hình bình hành.

. 3) I là trung điểm của CF $\Rightarrow OI \perp CF$ (quan hệ đường kính và dây cung). Theo trên ABCE là hình bình hành $\Rightarrow AB \parallel EC \Rightarrow OI \perp AB$ tại K, $\Rightarrow \triangle BKG$ vuông tại K. Ta cũng có $\triangle BHA$ vuông tại H

$\Rightarrow \angle BGK = \angle BAH$ (cung phụ với $\angle ABH$) mà $\angle BAH = \frac{1}{2} \angle BAC$ (do $\triangle ABC$ cân nên AH là phân giác)

$\Rightarrow \angle BAC = 2\angle BGO$.

Bài 46: Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (A; B là tiếp điểm). Từ A vẽ tia song song với PB cắt (O) tại C (C $\neq$ A). Đoạn PC cắt đường tròn tại điểm thứ hai D. Tia AD cắt PB tại E.

- a. Chứng minh $\triangle EAB \sim \triangle EBD$.
b. Chứng minh AE là trung tuyến của $\triangle PAB$.

HD: a) $\triangle EAB \sim \triangle EBD$ (g.g) vì: $\widehat{BEA}$ chung

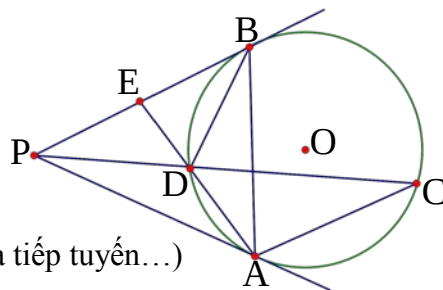
$\widehat{EAB} = \widehat{EBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến...)

$$\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = EA \cdot ED \quad (1)$$

* $\widehat{EPD} = \widehat{PCA}$ (s.l.t); $\widehat{EAP} = \widehat{PCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến...)

$\Rightarrow \widehat{EPD} = \widehat{EAP}$; $\widehat{PEA}$ chung $\Rightarrow \triangle EPD \sim \triangle EAP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EP}{EA} = \frac{ED}{EP} \Rightarrow EP^2 = EA \cdot ED \quad (2) \text{ Từ 1 \& 2 } \Rightarrow EB^2 = EP^2 \Rightarrow EB = EP \Rightarrow AE \text{ là trung tuyến } \triangle PAB.$$



Bài 47: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A. Lấy trên cạnh AC một điểm D. Dựng CE vuông góc BD.

- a. Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle ECD$.
b. Chứng minh tứ giác ABCE là tứ giác nội tiếp.
c. Chứng minh FD vuông góc BC, trong đó F là giao điểm của BA và CE.
d. Cho $\widehat{ABC} = 60^\circ$; $BC = 2a$; $AD = a$. Tính AC; đường cao AH của $\triangle ABC$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADEF.

HD: a) $\triangle ABD \sim \triangle ECD$ (g.g)

b) tứ giác ABCE là tứ giác nội tiếp (Quĩ tích cung chứa góc 90°)

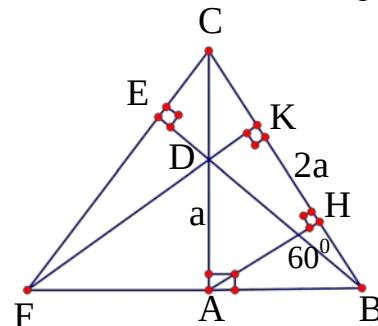
c) Chứng minh D là trực tâm $\triangle CBF$.

$$d) AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = 2a \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$AB = BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2a \cdot \cos 60^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$$

$$AH = AB \cdot \sin \widehat{ABC} = a \cdot \sin 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \triangle FKB \text{ vuông tại K, có } \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BFK} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow AD = FD \cdot \sin \widehat{BFK} \Rightarrow AD = FD \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow a = FD \cdot 0,5 \Rightarrow FD = a : 0,5 = 2a.$$



Bài 48: Cho $\triangle ABC$ vuông ($\widehat{ABC} = 90^\circ$; $BC > BA$) nội tiếp trong đường tròn đường kính AC. Kẻ dây cung BD vuông góc AC. H là giao điểm AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn đường kính EC cắt BC tại I ($I \neq C$).

a. Chứng minh $\frac{CI}{CB} = \frac{CE}{CA}$

b. Chứng minh D; E; I thẳng hàng.

c. Chứng minh HI là một tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC.

HD: a) $AB \parallel EI$ (cùng $\perp BC$)

$$\Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{CE}{CA} \quad (\text{đ/lí Ta-lét})$$

b) chứng minh ABED là hình thoi $\Rightarrow DE \parallel AB$ mà $EI \parallel AB$

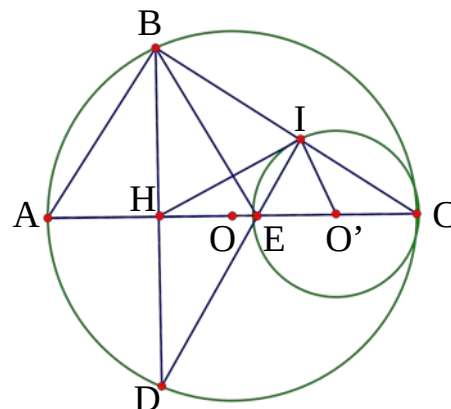
$\Rightarrow D, E, I$ cùng nằm trên đường thẳng đi qua E $\parallel AB$

$\Rightarrow D, E, I$ thẳng hàng.

c) $\widehat{EIO'} = \widehat{EO'I}$ (vì $\triangle EO'I$ cân; $O'I = O'E = R_{(O')}$)

$\widehat{EO'I} = \widehat{HED}$ (đ/đ); $\triangle BID$ vuông; IH là trung tuyến $\Rightarrow \triangle HID$ cân $\Rightarrow \widehat{HIE} = \widehat{HDI}$

Mà $\widehat{HDI} + \widehat{HED} = 90^\circ \Rightarrow \text{đpcm.}$



Bài 49: Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng (d) cố định không cắt $(O; R)$. Hạ $OH \perp (d)$ ($H \in d$). M là một điểm thay đổi trên (d) ($M \neq H$). Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MP và MQ (P, Q là tiếp điểm) với $(O; R)$. Dây cung PQ cắt OH ở I ; cắt OM ở K .

- Chứng minh 5 điểm O, Q, H, M, P cùng nằm trên 1 đường tròn.
- Chứng minh $IH \cdot IO = IQ \cdot IP$
- Giả sử $\widehat{PMQ} = 60^\circ$. Tính tỉ số diện tích 2 tam giác: ΔMPQ và ΔOPQ .

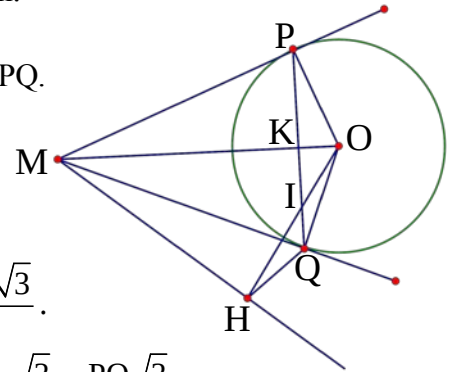
HD: a) 5 điểm O, Q, H, M, P cùng nằm trên 1 đường tròn
(Dựa vào quỹ tích cung chứa góc 90°)

$$b) \Delta OIP \sim \Delta QIH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IO}{IP} = \frac{IQ}{IH} \Rightarrow IH \cdot IO = IQ \cdot IP$$

$$c) \Delta v \text{ MKQ có: } MK = KQ \cdot \tan \widehat{MQK} = KQ \cdot \tan 60^\circ = \frac{PQ}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{PQ\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Delta v \text{ OKQ có: } OK = KQ \cdot \tan \widehat{OQK} = KQ \cdot \tan 30^\circ = KQ \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{PQ}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{PQ\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MPQ}}{S_{OPQ}} = \frac{\frac{PQ\sqrt{3}}{2}}{\frac{PQ\sqrt{3}}{6}} = 3$$



Bài 50: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $AB=2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E ($E \neq A$). Từ E, A, B kẻ các tiếp tuyến với nửa đường tròn. Tiếp tuyến kẻ từ E cắt hai tiếp tuyến kẻ từ A và B theo thứ tự tại C và D .

- Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E tới nửa đường tròn. Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp được trong một đường tròn.

$$b) \text{ Chứng minh } \Delta EAC \sim \Delta EBD, \text{ từ đó suy ra } \frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}.$$

c. Gọi N là giao điểm của AD và BC . Chứng minh $MN \parallel BD$.

d. Chứng minh: $EA^2 = EC \cdot EM - EA \cdot AO$.

e. Đặt $\widehat{AOC} = \alpha$. Tính theo R và α các đoạn AC và BD .
Chứng tỏ rằng tích $AC \cdot BD$ chỉ phụ thuộc giá trị của R , không phụ thuộc vào α .

HD: a) $ACMO$ nội tiếp (Dựa vào quỹ tích cung chứa góc 90°)

b) $AC \parallel BD$ (cùng $\perp EB$) $\Rightarrow \Delta EAC \sim \Delta EBD$

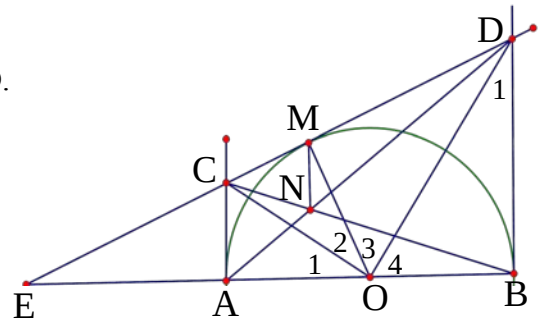
$$\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{AC}{BD} \quad (1) \text{ mà } AC = CM; BD = MD \text{ (T/c hai tiếp tuyến cắt nhau)} \Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{CM}{DM} \quad (2) \Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}$$

$$c) AC \parallel BD \text{ (cmt)} \Rightarrow \Delta NAC \sim \Delta NBD \Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{AC}{BD} \quad (3). \text{ Từ 1; 2; 3 } \Rightarrow \frac{NC}{NB} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MN \parallel BD$$

$$d) \widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \text{ mà } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ; \widehat{O_4} + \widehat{D_1} = 90^\circ (\dots)$$

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{O_2} = \widehat{O_1} = \alpha. \text{ Vậy: } DB = \frac{OB}{\tan \alpha} = \frac{R}{\tan \alpha}; \text{ Lại có: } AC = OA \cdot \tan \alpha = R \cdot \tan \alpha \Rightarrow AC \cdot DB = R \cdot \tan \alpha \cdot \frac{R}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow AC \cdot DB = R^2 \text{ (Đpcm)}$$



Bài 51: Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Gọi H là giao điểm của 3 đường cao $AA_1; BB_1; CC_1$.

- Chứng minh tứ giác HA_1BC_1 nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn ấy.
- Chứng minh A_1A là phân giác của $\widehat{B_1A_1C_1}$.

c. Gọi J là trung điểm của AC. Chứng minh IJ là trung trực của A_1C_1 .

d. Trên đoạn HC lấy 1 điểm M sao cho $\frac{MH}{MC} = \frac{1}{3}$.

So sánh diện tích của 2 tam giác: $\triangle HAC$ và $\triangle HJM$.

HD: a) HA_1BC_1 nội tiếp (quĩ tích cung chứa góc 90°)

Tâm I là trung điểm BH.

b) C/m: $\widehat{HA_1C_1} = \widehat{HBC_1}$; $\widehat{HA_1B_1} = \widehat{HCB_1}$;

$\widehat{HBC_1} = \widehat{HCB_1} \Rightarrow \widehat{HA_1C_1} = \widehat{HA_1B_1} \Rightarrow \text{đpcm.}$

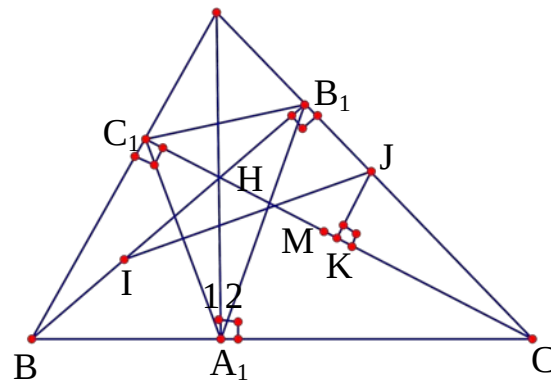
c) $IA_1 = IC_1 = R_{(I)}$; $JA = JA_1 = AC/2 \dots$

$\Rightarrow IJ$ là trung trực của A_1C_1 .

d) $S_{HJM} = \frac{1}{2} HM.JK$; $S_{HAC} = \frac{1}{2} HC.AC_1$

$\Rightarrow S_{HAC} : S_{HJM} = \frac{HC.AC_1}{HM.JK}$ mà $\frac{MH}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HC}{HM} = \frac{HM+MC}{HM} = 1 + \frac{MC}{HM} = 1 + 3 = 4$; $\frac{AC_1}{JK} = 2$ ($JK \parallel AC_1$)

$\Rightarrow S_{HAC} : S_{HJM} = 8$



Bài 52: Cho điểm C cố định trên một đường thẳng xy. Dựng nửa đường thẳng Cz vuông góc với xy và lấy trên đó 2 điểm cố định A, B (A ở giữa C và B). M là một điểm di động trên xy. Đường vuông góc với AM tại A và với BM tại B cắt nhau tại P.

a. Chứng minh tứ giác MABP nội tiếp được và tâm O của đường tròn này nằm trên một đường thẳng cố định đi qua điểm giữa L của AB.

b. Kẻ $PI \perp Cz$. Chứng minh I là một điểm cố định.

c. BM và AP cắt nhau ở H; BP và AM cắt nhau ở K. Chứng minh rằng $KH \perp PM$.

d. Cho N là trung điểm của KH. Chứng minh các điểm N; L; O thẳng hàng.

HD: a) MABP nội tiếp đ/tròn đ/k MP. (quĩ tích cung chứa góc $90^\circ \dots$)

$OA = OB = R_{(O)} \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực AB đi qua L là trung điểm AB...

b) $IP \parallel CM (\perp Cz) \Rightarrow MPIC$ là hình thang. $\Rightarrow IL = LC$ không đổi vì A, B, C cố định. $\Rightarrow I$ cố định.

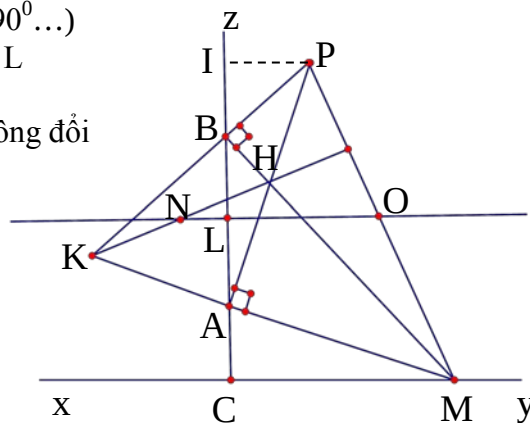
c) $PA \perp KM$; $PK \perp MB \Rightarrow H$ là trực tâm $\triangle PKM$
 $\Rightarrow KH \perp PM$

d) $AHBK$ nội tiếp đ/tròn đ/k KH (quĩ tích cung chứa góc...)

$\Rightarrow N$ là tâm đ/tròn ngoại tiếp $\dots \Rightarrow NE = NA = R_{(N)}$

$\Rightarrow N$ thuộc đường trung trực AB

$\Rightarrow O, L, N$ thẳng hàng.



Bài 53: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và K là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AB lấy một điểm M (khác K; B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$. Kẻ dây BP song song với KM. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AP, BM.

a. So sánh hai tam giác: $\triangle AKN$ và $\triangle BKM$.

b. Chứng minh: $\triangle KMN$ vuông cân.

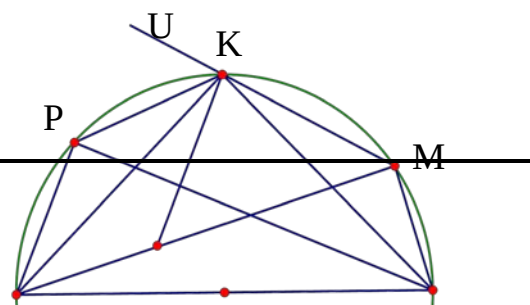
c. Tứ giác ANKP là hình gì? Vì sao?

HD: a) $\triangle AKN = \triangle BKM$ (c.g.c)

b) HS tự c/m. $\triangle KMN$ vuông cân.

c) $\triangle KMN$ vuông $\Rightarrow KN \perp KM$ mà $KM \parallel BP \Rightarrow KN \perp BP$

$\widehat{APB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp...) $\Rightarrow AP \perp BP$



$\Rightarrow KN \parallel AP (\perp BP)$

$KM \parallel BP \Rightarrow \widehat{KMN} = \widehat{PAT} = 45^\circ$

Mà $\widehat{PAM} = \widehat{PKU} = \frac{\widehat{PKM}}{2} = 45^\circ$

$\widehat{PKN} = 45^\circ; \widehat{KNM} = 45^\circ \Rightarrow PK \parallel AN$. Vậy ANPK là hình bình hành.

$\begin{matrix} & T & \\ & // & \\ A & & B \\ & O & \end{matrix}$

Bài 54: Cho đường tròn tâm O, bán kính R, có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. M là một điểm tùy ý thuộc cung nhỏ AC. Nối MB, cắt CD ở N.

- Chứng minh: tia MD là phân giác của góc AMB.
- Chứng minh: $\triangle BOM \sim \triangle BNA$. Chứng minh: BM.BN không đổi.
- Chứng minh: tứ giác ONMA nội tiếp. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ONMA, I di động như thế nào?

HD: a) $\widehat{AMD} = \widehat{DMB} = 45^\circ$ (chắn cung $\frac{1}{4}$ đ/tròn)

$\Rightarrow MD$ là tia phân giác $\widehat{AMB}$

b) $\triangle OMB$ cân vì $OM = OB = R_{(O)}$

$\triangle NAB$ cân có NO vừa là đ/cao vừa là đường trung tuyến.

$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle NAB$

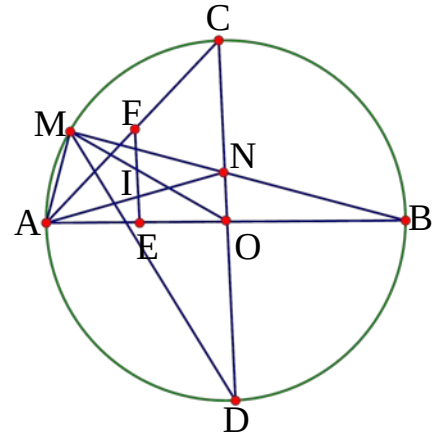
$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{BO}{BN} \Rightarrow BM.BN = BO.BA = 2R^2$ không đổi.

c) ONMA nội tiếp đ/tròn đ/k AN. Gọi I là tâm đ/tròn ngoại tiếp

$\Rightarrow I$ cách đều A và O cố định $\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực OA

Gọi E và F là trung điểm của AO; AC

Vì M chạy trên cung nhỏ AC nên tập hợp I là đoạn EF



Bài 55: Cho $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$) nội tiếp một đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tia BD cắt tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) tại điểm E; EC cắt (O) tại F.

- Chứng minh: BC song song với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A.
- Tứ giác ABCE là hình gì? Tại sao?
- Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của các tia BC; OI. So sánh $\widehat{BGO}$ với $\widehat{BAC}$.
- Cho biết $DF \parallel BC$. Tính $\cos \widehat{ABC}$.

HD: a) Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow AH \perp BC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

lập luận chỉ ra $AH \perp AE \Rightarrow BC \parallel AE$. (1)

b) $\triangle ADE = \triangle CDB$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = BC$ (2)

Từ 1 và 2 $\Rightarrow ABCE$ là hình bình hành.

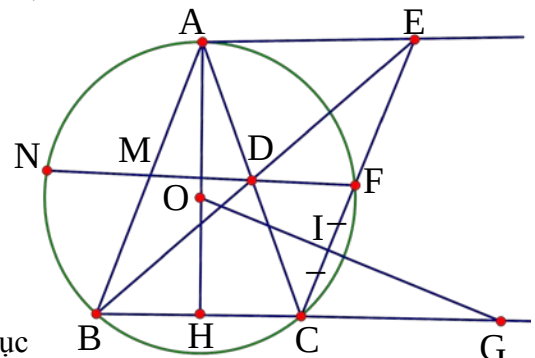
c) Theo c.m.t $\Rightarrow AB \parallel CF \Rightarrow GO \perp AB$.

$\Rightarrow \widehat{BGO} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{BAH} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$

d) Tia FD cắt AB tại M, cắt (O) tại N.; $DF \parallel BC$ và AH là trục đối xứng của $\triangle ABC$ và đ/tròn (O) nên F, D thứ tự đối xứng với N, M qua AH.

$\Rightarrow FD = MN = MD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} ND = BH; \triangle NDA \sim \triangle CDF$ (g.g) $\Rightarrow DF.DN = DA.DC$

$\Rightarrow 2BH^2 = \frac{1}{4} AC^2 \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{2}}{4} AC \Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Bài 56: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Các đường thẳng AO; AO' cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm C; D và cắt (O') lần lượt tại E; F.

- Chứng minh: C; B; F thẳng hàng.
- Chứng minh: Tứ giác CDEF nội tiếp được.
- Chứng minh: A là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BDE$.
- Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O').

HD: a) $\widehat{CBA} = 90^\circ = \widehat{FBA}$ (góc nội tiếp chắn nửa đ/tròn)

$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{FBA} = 180^\circ \Rightarrow C, B, F$ thẳng hàng.

b) $\widehat{CDF} = 90^\circ = \widehat{CEF} \Rightarrow CDEF$ nội tiếp (quĩ tích ...)

c) $CDEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ECB}$ (cùng chắn cung EF)

Xét (O) có: $\widehat{ADB} = \widehat{ECB}$ (cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADB} \Rightarrow DA$ là tia phân giác $\widehat{BDE}$. Tương tự EA là tia phân giác $\widehat{DEB}$

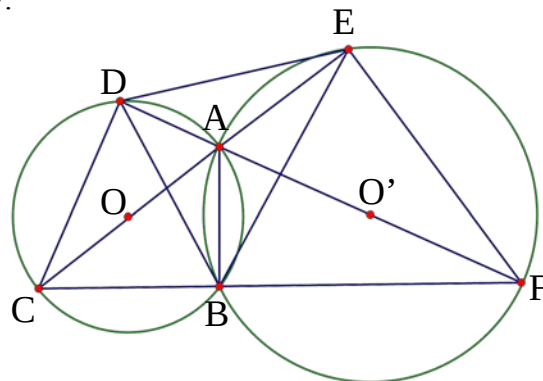
Vậy A là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BDE$.

d) $ODEO'$ nội tiếp. Thực vậy: $\widehat{DOA} = 2\widehat{DCA}$; $\widehat{EO'A} = 2\widehat{EFA}$ mà $\widehat{DCA} = \widehat{EFA}$ (góc nội tiếp chắn cung DE) $\Rightarrow \widehat{DOA} = \widehat{EO'A}$; mặt khác: $\widehat{DAO} = \widehat{EAO'}$ (đ/đ) $\Rightarrow \widehat{ODO'} = \widehat{O'EO} \Rightarrow ODEO'$ nội tiếp.

Nếu DE tiếp xúc với (O) và (O') thì $ODEO'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AO = AO' = AB$.

Đảo lại: $AO = AO' = AB$ cũng kết luận được DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O')

Kết luận: Điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O') là: $AO = AO' = AB$.



Bài 57: Cho đường tròn (O; R) có 2 đường kính cố định $AB \perp CD$.

a) Chứng minh: ACBD là hình vuông.

b). Lấy điểm E di chuyển trên cung nhỏ BC ($E \neq B$; $E \neq C$). Trên tia đối của tia EA lấy đoạn $EM = EB$.

Chứng tỏ: ED là tia phân giác của $\widehat{AEB}$ và $ED \parallel MB$.

c). Suy ra CE là đường trung trực của BM và M di chuyển trên đường tròn mà ta phải xác định tâm và bán kính theo R.

HD: a) $AB \perp CD$; $OA = OB = OC = OD = R_{(O)}$

$\Rightarrow ACBD$ là hình vuông.

b) $\widehat{AED} = \frac{1}{2} \widehat{AOD} = 45^\circ$; $\widehat{DEB} = \frac{1}{2} \widehat{DOB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DEB} \Rightarrow ED$ là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.

$\widehat{AED} = 45^\circ$; $\widehat{EMB} = 45^\circ$ ($\triangle EMB$ vuông cân tại E)

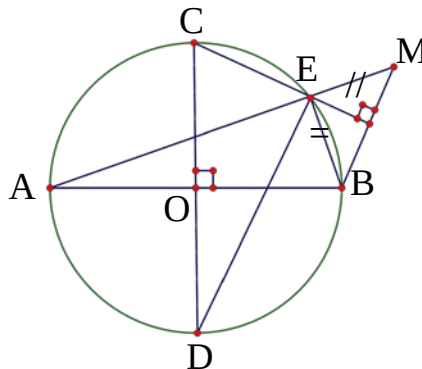
$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{EMB}$ (2 góc đồng vị) $\Rightarrow ED \parallel MB$.

c) $\triangle EMB$ vuông cân tại E và $CE \perp DE$; $ED \parallel BM$

$\Rightarrow CE \perp BM \Rightarrow CE$ là đường trung trực BM.

d) Vì CE là đường trung trực BM nên $CM = CB = R\sqrt{2}$

Vậy M chạy trên đường tròn (C ; $R' = R\sqrt{2}$)



Bài 58: Cho $\triangle ABC$ đều, đường cao AH. Qua A vẽ một đường thẳng về phía ngoài của tam giác, tạo với cạnh AC một góc 40° . Đường thẳng này cắt cạnh BC kéo dài ở D. Đường tròn tâm O đường kính CD cắt AD ở E. Đường thẳng vuông góc với CD tại O cắt AD ở M.

a. Chứng minh: AHCE nội tiếp được. Xác định tâm I của đường tròn đó.

b. Chứng minh: $CA = CM$.

c. Đường thẳng HE cắt đường tròn tâm O ở K, đường thẳng HI cắt đường tròn tâm I ở N và cắt đường thẳng DK ở P. Chứng minh: Tứ giác NPKE nội tiếp.

Bài 59: BC là một dây cung của đường tròn (O; R) ($BC \neq 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong $\triangle ABC$. Các đường cao AD; BE; CF đồng quy tại H.

- Chứng minh: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.
 - Gọi A' là trung điểm BC. Chứng minh: $AH = 2.A'O$.
 - Gọi A₁ là trung điểm EF. Chứng minh: $R.AA_1 = AA'.OA'$.
 - Chứng minh: $R.(EF + FD + DE) = 2.S_{ABC}$.
- Suy ra vị trí điểm A để tổng $(EF + FD + DE)$ đạt GTLN.

Bài 60: Cho đường tròn tâm (O; R) có AB là đường kính cố định còn CD là đường kính thay đổi. Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đường tròn tại B và AD, AC lần lượt cắt (Δ) tại Q và P.

- Chứng minh: Tứ giác CPQD nội tiếp được.
- Chứng minh: Trung tuyến AI của $\triangle AQP$ vuông góc với DC.
- Tìm tập hợp các tâm E của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CPD$.

Bài 61: Cho $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$; $\hat{A} < 90^\circ$), một cung tròn BC nằm bên trong $\triangle ABC$ tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi Q là giao điểm của MB, IK.

- Chứng minh: Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được.
- Chứng minh: tia đối của tia MI là phân giác $\widehat{HMK}$.
- Chứng minh: Tứ giác MPIQ nội tiếp được $\Rightarrow PQ \parallel BC$.

Bài 62: Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, C là trung điểm của cung AB; N là trung điểm của BC. Đường thẳng AN cắt nửa đường tròn (O) tại M. Hạ $CI \perp AM$ ($I \in AM$).

- Chứng minh: Tứ giác CIOA nội tiếp được trong 1 đường tròn.
- Chứng minh: Tứ giác BMCI là hình bình hành.
- Chứng minh: $\widehat{MOI} = \widehat{CAI}$.
- Chứng minh: $MA = 3.MB$.

HD: a) $\widehat{COA} = 90^\circ (\dots)$; $\widehat{CIA} = 90^\circ (\dots)$
 $\Rightarrow$ Tứ giác CIOA nội tiếp (quĩ tích cung chứa góc 90°)
 b) $MB \parallel CI (\perp BM)$. (1)

$\triangle CIN = \triangle BMN$ (g.c.g) $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ (đ/đ); $NC = NB$; $\widehat{NCI} = \widehat{NBM}$ (slt)
 $\Rightarrow CI = BM$ (2). Từ 1 và 2 $\Rightarrow BMCI$ là hình bình hành.

c) $\triangle CIM$ vuông cân ($\widehat{CIA} = 90^\circ$; $\widehat{CMI} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = 45^\circ$) $\Rightarrow MI = CI$; $\triangle IOM = \triangle IOC$ vì OI chung;

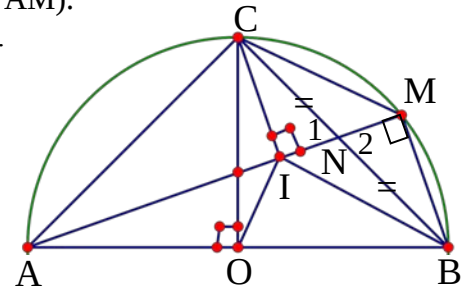
$IC = IM$ (c.m.t); $OC = OM = R_{(O)} \Rightarrow \widehat{MOI} = \widehat{IOC}$ mà: $\widehat{IOC} = \widehat{CAI} \Rightarrow \widehat{MOI} = \widehat{CAI}$

d) $\triangle ACN$ vuông có: $AC = R\sqrt{2}$; $NC = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{AC}{2}$ (với $R = AO$)

Từ đó: $AN = \sqrt{AC^2 + CN^2} = \sqrt{2R^2 + \frac{R^2}{2}} = R\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{R\sqrt{10}}{2}$; $NI = \frac{NC^2}{NA} = \frac{R\sqrt{10}}{10} = MN = \frac{MI}{2}$

$\Rightarrow MB = \sqrt{NC^2 - MN^2} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{10}} = \frac{2R}{\sqrt{10}} = \frac{R\sqrt{10}}{5} \Rightarrow AM = AN + MN = \frac{R\sqrt{10}}{2} + \frac{R\sqrt{10}}{10} = \frac{3R\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow AM = 3 BM$.



Bài 63: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O), đường cao AH cắt đường tròn ở D, đường cao BK cắt AH ở E.

a. Chứng minh: $\widehat{BKH} = \widehat{BCD}$.

b. Tính $\widehat{BEC}$.

c. Biết cạnh BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Hỏi tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC chuyển động trên đường nào? Nêu cách dựng đường đó (chỉ nêu cách dựng) và cách xác định rõ nó (giới hạn đường đó).

d. Chứng minh: ΔIOE cân ở I.

HD: a) ABHK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{BAH}$;

$\widehat{BCD} = \widehat{BAH}$ (cùng chắn cung BD) $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BKH}$

b) CE cắt AB ở F.;

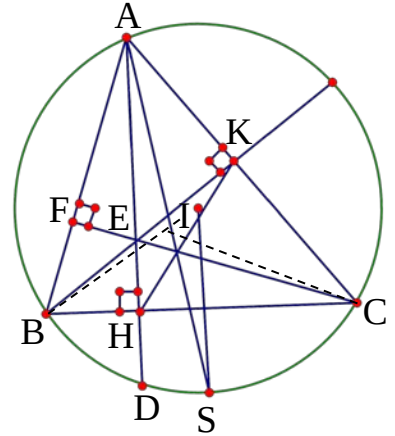
AFEK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEK} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 120^\circ$

c) $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 120^\circ$

Vậy I chuyển động trên cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC, cung này nằm trong đường tròn tâm (O).

d) Trong đ/tròn (O) có $\widehat{DAS} = sđ \frac{\widehat{DS}}{2}$; trong đ/tròn (S) có $\widehat{ISO} = sđ \frac{\widehat{IO}}{2}$

vì $\widehat{DAS} = \widehat{ISO}$ (so le trong) nên: $\frac{\widehat{DS}}{2} = \frac{\widehat{IO}}{2}$ mà $\widehat{DS} = \widehat{IE} \Rightarrow \widehat{IO} = \widehat{IE} \Rightarrow \Delta IOE$ cân ở I.



Bài 64: Cho hình vuông ABCD, phía trong hình vuông dựng cung một phần tư đường tròn tâm B, bán kính AB và nửa đường tròn đường kính AB. Lấy 1 điểm P bất kỳ trên cung AC, vẽ $PK \perp AD$ và $PH \perp AB$. Nối PA, cắt nửa đường tròn đường kính AB tại I và PB cắt nửa đường tròn này tại M. Chứng minh rằng:

a. I là trung điểm của AP.

b. Các đường PH, BI và AM đồng quy.

c. $PM = PK = AH$.

d. Tứ giác APMH là hình thang cân.

HD: a) ΔABP cân tại B. ($AB = PB = R_{(B)}$) mà $\widehat{AIB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp ...)

$\Rightarrow BI \perp AP \Rightarrow BI$ là đường cao cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AP

b) HS tự c/m.

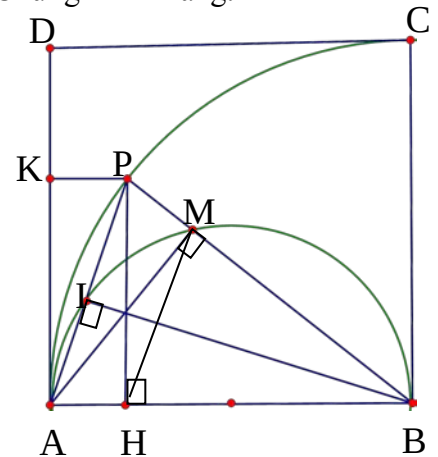
c) ΔABP cân tại B $\Rightarrow AM = PH$; AP chung $\Rightarrow \Delta AHP = \Delta PMA$

$\Rightarrow AH = PM$; AHPK là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = KP \Rightarrow PM = PK = AH$

d) PMAH nằm trên đ/tròn đ/k AP mà $PM = AH$ (c.m.t)

$\Rightarrow \widehat{PM} = \widehat{AH} \Rightarrow PA \parallel MH$

Vậy APMH là hình thang cân.



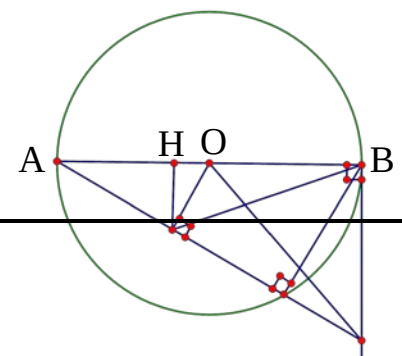
Bài 65: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Kẻ tia tiếp tuyến Bx, M là điểm thay đổi trên Bx; AM cắt (O) tại N. Gọi I là trung điểm của AN.

a. Chứng minh: Tứ giác BOIM nội tiếp được trong 1 đường tròn.

b. Chứng minh: $\Delta IBN \sim \Delta OMB$.

c. Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích tam giác AIO có GTLN.

HD: a) BOIM nội tiếp được vì $\widehat{OIM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$



b) $\widehat{INB} = \widehat{OBM} = 90^\circ$; $\widehat{NIB} = \widehat{BOM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BM)
 $\Rightarrow \Delta IBN \sim \Delta OMB$.

c) $S_{AIO} = \frac{1}{2} AO \cdot IH$; S_{AIO} lớn nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất vì $AO = R_{(O)}$

Khi M chạy trên tia Bx thì I chạy trên nửa đường tròn đ/k AO. Do đó S_{AIO} lớn nhất

Khi IH là bán kính, khi đó ΔAIH vuông cân, tức $\widehat{HAI} = 45^\circ$

Vậy khi M cách B một đoạn $BM = AB = 2R_{(O)}$ thì S_{AIO} lớn nhất.

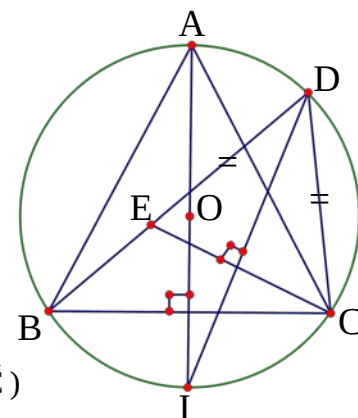
I

N

M

Bài 66: Cho ΔABC đều, nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Gọi AI là một đường kính cố định và D là điểm di động trên cung nhỏ AC ($D \neq A$ và $D \neq C$).

- Tính cạnh của ΔABC theo R và chứng tỏ AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.
- Trên tia DB lấy đoạn $DE = DC$. Chứng tỏ ΔCDE đều và $DI \perp CE$.
- Suy ra E di động trên đường tròn mà ta phải xác định tâm và giới hạn.
- Tính theo R diện tích ΔADI lúc D là điểm chính giữa cung nhỏ AC.



HD: a) ΔABC đều, nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. HS tự c/m :

$$\Rightarrow AB = AC = BC = R\sqrt{3}$$

Trong đ/tròn $(O; R)$ có: $AB = AC \Rightarrow$ Tâm O cách đều 2 cạnh AB và AC

$\Rightarrow AO$ hay AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) Ta có : $DE = DC$ (gt) $\Rightarrow \Delta DEC$ cân ; $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ (cùng chắn $\widehat{BC}$)

$\Rightarrow \Delta CDE$ đều. I là điểm giữa $\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{IB} = \widehat{IC} \Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{IDC}$

$\Rightarrow DI$ là tia phân giác $\widehat{BDC} \Rightarrow \Delta CDE$ đều có DI là tia phân giác nên cũng là đường cao $\Rightarrow DI \perp CE$

c) ΔCDE đều có DI là đường cao cũng là đường trung trực của CE $\Rightarrow IE = IC$ mà I và C cố định $\Rightarrow IC$ không đổi $\Rightarrow E$ di động trên 1 đ/tròn cố định tâm I, bán kính = IC. Giới hạn : $I \in \widehat{AC}$ (cung nhỏ)

$D \rightarrow C$ thì $E \rightarrow C$; $D \rightarrow A$ thì $E \rightarrow B \Rightarrow E$ di động trên $\widehat{BC}$ nhỏ của đ/t $(I; R = IC)$ chứa trong ΔABC đều.

Bài 67: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Trên AD và DC, người ta lấy các điểm E và F sao cho :

$$AE = DF = \frac{a}{3}.$$

- So sánh ΔABE và ΔDAF . Tính các cạnh và diện tích của chúng.
- Chứng minh $AF \perp BE$.
- Tính tỉ số diện tích ΔAIE và ΔBIA ; diện tích ΔAIE và ΔBIA và diện tích các tứ giác IEDF và IBCF.

Bài 68: Cho ΔABC có các góc đều nhọn; $\widehat{A} = 45^\circ$. Vẽ các đường cao BD và CE.

Gọi H là giao điểm của BD, CE.

a. Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp được trong 1 đường tròn.; b. Chứng minh: $HD = DC$.

c. Tính tỷ số: $\frac{DE}{BC}$

d. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh: $OA \perp DE$

Bài 69: Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB. Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC. Chứng minh:

- Tứ giác CBMD nội tiếp được trong đường tròn.
- Khi điểm D di động trên đường tròn thì $(\widehat{BMD} + \widehat{BCD})$ không đổi.
- $DB \cdot DC = DN \cdot AC$

Bài 70: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC . Hai tiếp tuyến tại C và D với đường tròn (O) cắt nhau tại E . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và CD ; AD và CE . Chứng minh:

- $BC \parallel DE$.
- Các tứ giác $CODE, APQC$ nội tiếp được.
- Tứ giác $BCQP$ là hình gì?

Bài 71: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B ; các tiếp tuyến tại A của các đường tròn (O) và (O') cắt đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại C và D . Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các dây AC và AD . Chứng minh:

- $\Delta ABD \sim \Delta CBA$.
- $\widehat{BQD} = \widehat{APB}$
- Tứ giác $APBQ$ nội tiếp.

Bài 72: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Từ A và B kẻ 2 tiếp tuyến Ax và By . Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba, cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở E và F .

- Chứng minh: $AEMO$ là tứ giác nội tiếp được.
- AM cắt OE tại P , BM cắt OF tại Q . Tứ giác $MPOQ$ là hình gì? Tại sao?
- Kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$). Gọi K là giao điểm của MH và EB . So sánh MK với KH .
- Cho $AB = 2R$ và gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔEOF . Chứng minh: $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$.

Bài 73: Từ điểm A ngoài đường tròn (O) kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AKD sao cho $BD \parallel AC$. Nối BK cắt AC ở I .

- Nêu cách vẽ cát tuyến AKD sao cho $BD \parallel AC$.
- Chứng minh: $IC^2 = IK \cdot IB$.
- Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng minh: Cát tuyến AKD đi qua O .

Bài 74: Cho ΔABC cân ở A , góc A nhọn. Đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC ở E . Kẻ $EN \perp AC$. Gọi M là trung điểm BC . Hai đ/thẳng AM và EN cắt nhau ở F .

- Tìm những tứ giác có thể nội tiếp đường tròn. Giải thích vì sao? Xác định tâm các đường tròn đó.
- Chứng minh: EB là tia phân giác của $\angle AEF$.
- Chứng minh: M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAFN .

Bài 75: Cho nửa đường tròn tâm (O) , đường kính BC . Điểm A thuộc nửa đường tròn đó. Dựng hình vuông $ABED$ thuộc nửa mặt phẳng bờ AB , không chứa đỉnh C . Gọi F là giao điểm của AE và nửa đường tròn (O) . K là giao điểm của CF và ED .

- Chứng minh: Bốn điểm E, B, F, K nằm trên một đường tròn.
- ΔBKC là tam giác gì? Vì sao?
- Tìm quỹ tích điểm E khi A di động trên nửa đường tròn (O) .

Bài 76: Cho ΔABC vuông tại C , có $BC = \frac{1}{2} AB$. Trên cạnh BC lấy điểm E (E khác B và C). Từ B kẻ đường thẳng d vuông góc với AE , gọi giao điểm của d với AE, AC kéo dài lần lượt là I, K .

- Tính độ lớn góc $\widehat{CIK}$.
- Chứng minh: $KA \cdot KC = KB \cdot KI$; $AC^2 = AI \cdot AE - AC \cdot CK$.
- Gọi H là giao điểm của đường tròn đường kính AK với cạnh AB .

- Chứng minh: H, E, K thẳng hàng.
d. Tìm quỹ tích điểm I khi E chạy trên BC.

Bài 77: Cho ΔABC vuông ở A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy một điểm E. Nối BE và kéo dài cắt AC tại F.

a. Chứng minh: CDEF nội tiếp được.

b. Kéo dài DE cắt AC ở K. Tia phân giác của $\widehat{CKD}$ cắt EF và CD tại M và N. Tia phân giác của $\widehat{CBF}$ cắt DE và CF tại P và Q. Tứ giác MPNQ là hình gì? Tại sao?

c. Gọi r, r_1, r_2 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ADB, ADC. Chứng minh: $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Bài 78: Cho đường tròn (O;R). Hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC; AE cắt CO ở F, DE cắt AB ở M.

a. Tam giác CEF và EMB là các tam giác gì?

b. Chứng minh: Tứ giác FCBM nội tiếp. Tìm tâm đường tròn đó.

c. Chứng minh: Các đường thẳng OE, BF, CM đồng quy.

Bài 79: Cho đường tròn (O; R). Dây $BC < 2R$ cố định và A thuộc cung lớn BC (A khác B, C và không trùng điểm chính giữa của cung). Gọi H là hình chiếu của A trên BC; E, F thứ tự là hình chiếu của B, C trên đường kính AA'.

a. Chứng minh: $HE \perp AC$.

b. Chứng minh: $\Delta HEF \sim \Delta ABC$.

c. Khi A di chuyển, chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHEF cố định.

Bài 80: Cho ΔABC vuông ở A. Kẻ đường cao AH. Gọi I, K tương ứng là tâm các đường tròn nội tiếp ΔABH và ΔACH .

1) Chứng minh $\Delta ABC \sim \Delta HIK$.

2) Đường thẳng IK cắt AB, AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác HCNK nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $AM = AN$.

c) Chứng minh $S' \leq \frac{1}{2}S$, trong đó S, S' lần lượt là diện tích ΔABC và ΔAMN .