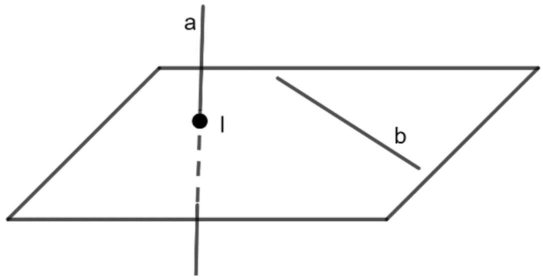
Các dạng bài tập về hai đường thẳng song song trong không gian

I. Lý thuyết ngắn gọn

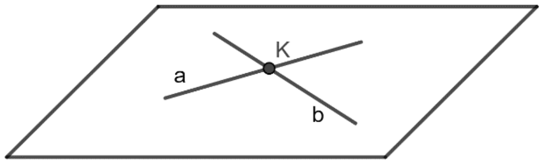
1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng

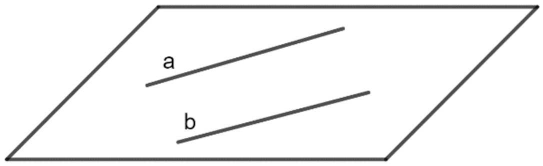
- Hai đường thẳng gọi là *chéo nhau* nếu chúng không đồng phẳng. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.



- Hai đường thẳng gọi là *cắt nhau* nếu chúng đồng phẳng và có một điểm chung



- Hai đường thẳng gọi là *song song* nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung



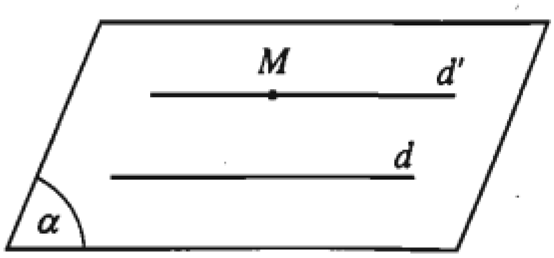
- Như vậy, trong không gian, có 4 vị trí tương đối của hai đường thẳng, đó là: song song, trùng nhau, cắt nhau và chéo nhau.

- Khi nhắc đến hai đường thẳng phân biệt, thì ta hiểu là có 3 vị trí tương đối của hai đường thẳng đó (bỏ đi trường hợp trùng nhau).

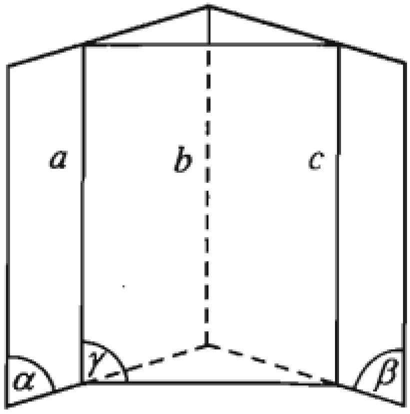
2. Hai đường thẳng song song

a. Tính chất của hai đường thẳng song song

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

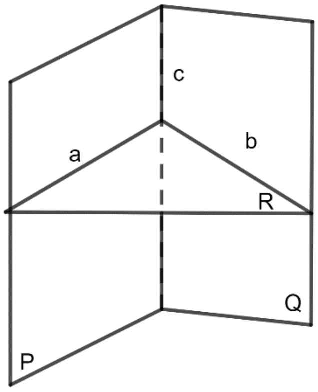


b. Định lý (về giao tuyến của ba mặt phẳng)

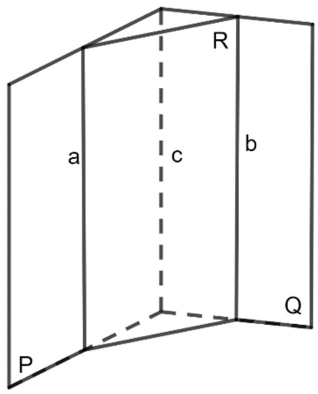
Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Giả sử (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c, trong đó: $a = (P) \cap (R), b = (Q) \cap (R), c = (P) \cap (Q)$. Khi đó:

TH1: a, b, c đồng quy

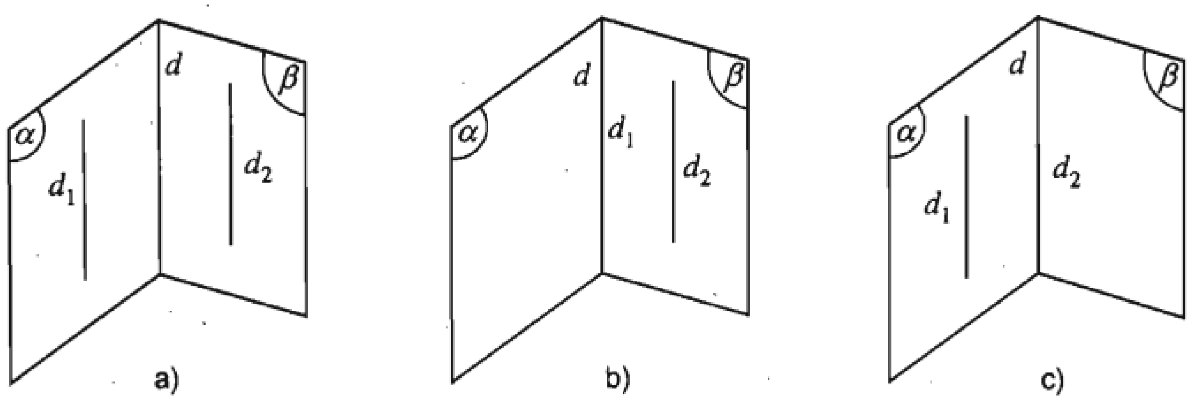


TH2: a // b // c



c. Hệ quả (Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) của hai mặt phẳng nói trên sẽ song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



II. Các dạng bài tập về hai đường thẳng song song trong không gian

Dạng 1: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp giải: Sử dụng một trong các cách sau

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng.

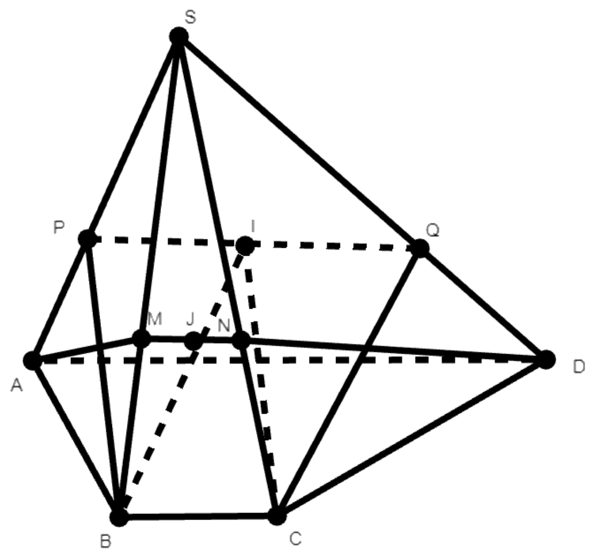
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

- Áp dụng định lí về giao tuyến song song.

- Áp dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình thang với đáy AD và BC. Biết AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Chứng minh MN // PQ.



Lời giải:

Ta có: $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$

Lại có $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \\ AD // BC \end{cases}$

Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (IBC) là đường thẳng qua I và song song với AD, BC.

Khi đó trong (SAD), qua I kẻ đường thẳng song song với AD, cắt SA tại P và cắt SD tại Q.

$\Rightarrow (SAD) \cap (IBC) = PQ$

$\Rightarrow PQ // AD // BC \ (1)$

Chứng minh tương tự:

$J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (ADJ)$

$\begin{cases} AD \subset (ADJ) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \\ (SBC) \cap (ADJ) = MN \end{cases}$

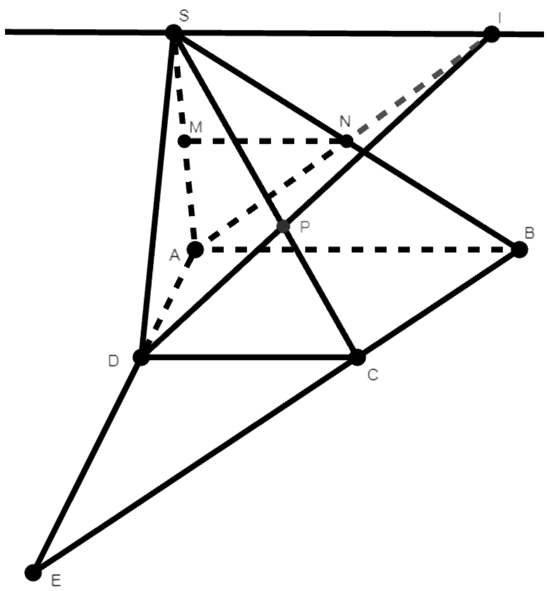
$\Rightarrow MN // AD // BC (2)$

Do đó, từ (1) và (2) suy ra: MN // PQ.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N là trung điểm SA và SB.

a. Chứng minh MN // CD.

b. Gọi P là giao điểm của SC và (ADN), I là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI // CD.



Lời giải:

a. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên MN // AB

Lại có ABCD là hình thang nên AB // CD

Do đó: MN // CD.

b. Trong mặt phẳng (ABCD), gọi E là giao điểm của AD và BC

Trong mặt phẳng (SCD), gọi P là giao điểm của SC và DI

Ta có: $E \in AD \subset (ADN)$

$\Rightarrow EN \subset (ADN)$

$\Rightarrow P \in (ADN)$

Vậy $P = SC \cap (ADN)$

Do $I = AN \cap DP$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in DP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAB) \\ I \in (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$

Ta có: $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI // CD$

Dạng 2: Chứng minh bốn điểm đồng phẳng, ba đường thẳng đồng quy trong không gian

a. Chứng minh bốn điểm đồng phẳng

Phương pháp giải:

Chứng minh bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng ta tìm hai đường thẳng a, b lần lượt đi qua hai trong bốn điểm trên và chứng minh a, b song song hoặc cắt nhau. Khi đó A, B, C, D thuộc mặt phẳng (a, b).

b. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải:

- Cách 1: Chứng minh đường thẳng thứ nhất đi qua giao điểm của hai đường thẳng còn lại.

- Cách 2: Chứng minh ba đường thẳng đôi một cắt nhau và chúng đôi một nằm trong ba mặt phẳng phân biệt

Bước 1: Xác định $\begin{cases} d_1, d_2 \subset (P), d_1 \cap d_2 = I_1 \\ d_2, d_3 \subset (Q), d_2 \cap d_3 = I_2 \\ d_3, d_1 \subset (R), d_3 \cap d_1 = I_3 \end{cases}$ với (P), (Q), (R) phân biệt

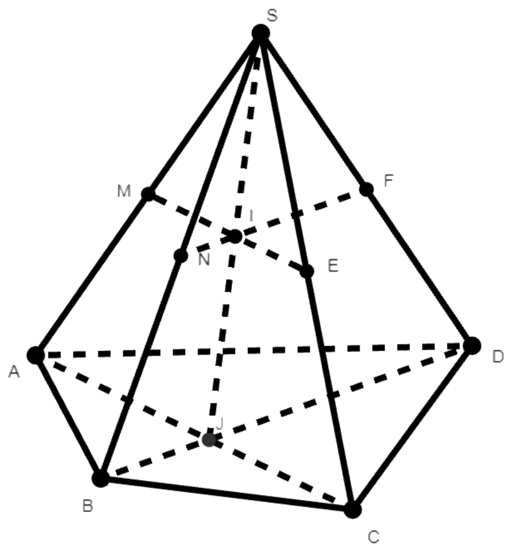
Bước 2: Kết luận d_1, d_2, d_3 đồng quy tại $I \equiv I_1 \equiv I_2 \equiv I_3$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD. Gọi J là giao điểm của AC và BD.

a. Chứng minh ME, NF, SJ đồng quy.

b. Chứng minh M, N, E, F đồng phẳng.



Lời giải:

a.Trong (SAC) gọi I là giao điểm của ME và SJ.

Ta có: ME là đường trung bình của tam giác SAC nên ME // AC

Suy ra MI // AC, mà M là trung điểm của SA

Nên I là trung điểm của SJ.

Suy ra: FI là đường trung bình của tam giác SJD

Suy ra FI // JD

Tương tự có: NI // JB nên N, I, F thẳng hàng

Vậy ME, NF, SJ đồng quy tại I.

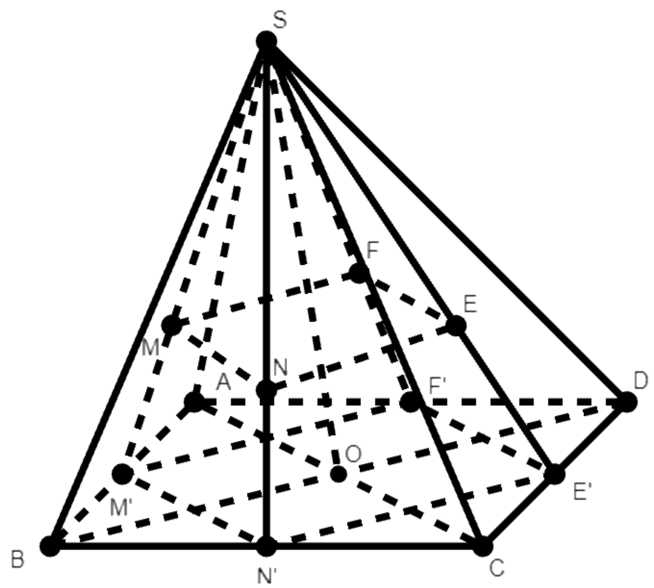
b. Do I là giao điểm của ME và NF nên ME và NF xác định một mặt phẳng

Suy ra: M, N, E, F đồng phẳng.

Ví dụ 4: Cho chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Chứng minh:

a. Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

b. ME, NF, SO đồng quy với O là tâm hình chữ nhật ABCD.



Lời giải:

a. Gọi M', N', E', F' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA

Ta có:

$\frac{SM}{SM'} = \frac{2}{3}; \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm tam giác)

$\Rightarrow \frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'}$

$\Rightarrow MN//M'N'$ (Định lý Ta – lét)

Tương tự: $\frac{SE}{SE'} = \frac{SF}{SF'}$

$\Rightarrow EF//E'F'$(Định lý Ta – lét)

Lại có: $\begin{cases} M'N'//AC \\ E'F'//AC \end{cases}$ (tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow M'N'//E'F'$

Do đó: MN // EF.

Vậy bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

b. Gọi I là giao điểm của ME và NF

Dễ thấy M’N’E’F’ là hình bình hành và O là giao điểm của M’E’ và N’F’

Xét ba mặt phẳng (M’SE’), (N’SF’), (MNEF) có

$(M'SE') \cap (N'SF') = SO$

$(M'SE') \cap (MNEF) = ME$

$(N'SF') \cap (MNEF) = NF$

$ME \cap NF = I$

Do đó theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng ME, NF, SO đồng quy tại I.

III. Bài tập áp dụng

1. Tự luận

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, AD, BC, CD. Chứng minh P, Q, R, S đồng phẳng.

Bài 2: Cho hình chóp S.ABC. Gọi E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SBC và SAB. Chứng minh EF // AC.

2. Trắc nghiệm

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm tam giác ABD, N là trung điểm của AD, M là trung điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MG // CN

B. MG và CN cắt nhau

C. MG // AB

D. MG và CN chéo nhau

Bài 2: Giả sử có ba đường thẳng a, b, c trong đó b // a và c // a. Những phát biểu nào sau đây là sai?

(1) Nếu mặt phẳng (a, b) không trùng với mặt phẳng (a, c) thì b và c chéo nhau

(2) Nếu mặt phẳng (a, b) trùng với mặt phẳng (a, c) thì ba đường thẳng a, b, c song song với nhau từng đôi một

(3) Dù cho hai mặt phẳng (a, b) và (a, c) có trùng nhau hay không, ta vẫn có b // c

A. Chỉ có (1) sai.

B. Chỉ có (2) sai

C. Chỉ có (3) sai

D. (1), (2) và (3) đều sai

Bài 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. MN // BD và 2MN = BD

B. MN // PQ và MN = PQ

C. MNPQ là hình bình hành

D. MP và NQ chéo nhau

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A’, B’, C’, D’ lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Đường thẳng nào không song song với A’B’?

A. AB

B. CD

C. SC

D. C’D’

Bài 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng chéo nhau khi chúng không có điểm chung

B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau

C. Hai đường thẳng song song nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng

D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng thì hai đường thẳng đó chéo nhau

Bài 6: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:

A. Qua I và song song với AB

B. Qua J và song song với BD

C. Qua G và song song với CD

D. Qua G và song song với BC

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (IJG):

A. Là đường thẳng song song với AB

B. Là đường thẳng song song với CD

C. Là đường thẳng song song với đường trung bình của hình thang ABCD

D. Cả A, B, C đều đúng

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD):

A. Là đường thẳng đi qua S song song với AB, CD

B. Là đường thẳng đi qua S

C. Là điểm S

D. Là mặt phẳng (SAD)